Grundsätze
der
Mechanik
vom
Gleichgewicht und der Bewegung
mit Anwendung
auf einzelne Probleme des Maschienenwesens, namentlich auf das Perpetuum mobile etc.

dargestellt
von

L. N. M. Carnot,
Mitglied des französischen National-Instituts, der Academie der Künste und Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

Aus dem Französischen übersetzt.

Herausgegeben
von
C. S. Weiß,
D. der Philosophie, mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Mit Kupfern.

Leipzig 1805
bey J. C. Hinrichs.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Das Original des hier in einer Uebersetzung mitgetheilten Werkes erschien ohnlängst in Paris unter dem Titel: „Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement, par L. N. M. Carnot, de l'Institut national de France, etc. à Paris, an XI — 1803." XXII und 262 S. 8. Die günstige Aufnahme, die es in den französischen Zeitungen fand, und der Name des Verfassers veranlaßten den Verleger, eine Uebersetzung davon zu veranstalten, und er übertrug es mir, die gegenwärtige Uebersetzung, welche ich nicht selbst gemacht habe, vor dem Drucke zu revidiren, und mit dem Originale zu vergleichen. Ich glaube, dieß, ohngeachtet vieler dringenderen andern Arbeiten, dennoch mit Sorgfalt gethan, und die Uebersetzung so weit verbessert zu haben, als man füglich eines Andern Arbeit umzuändern im Stande ist; auch habe ich verschiedene kleine Unrichtigkeiten des Originals dabey berichtigt, und kann bey der Entfernung des Druckortes nur wünschen, daß nicht neue Druckfehler im Deutschen sich mögen beym Abdruck eingeschlichen haben.

Ueber den eigentlichen Inhalt giebt schon die Vorrede des Verfassers nähere Auskunft, weshalb ich mich einer näheren Angabe desselben, so wie eines Urtheils über den grösseren oder geringeren Werth des Werkes selbst enthalte, der bey der dem Verfasser eignen Behandlungsart nicht ganz und gar verkannt werden wird.

Der Herausgeber.

Vorrede des Verfassers.

Seit der ersten Herausgabe dieses Buchs, im Jahr 1783, unter dem Titel Essai sur les Machines en général, sind über alle Theile der Mathematik so schöne und viel umfassende Werke erschienen, daß man kaum an das meinige noch denken konnte. Dessen ungeachtet hat man mich, weil es einige für die Zeit, in welcher es erschien, neue Ideen enthielt, und es jederzeit nützlich ist, die Grundwahrheiten der Wissenschaften unter den verschiedenen Gesichtspuncten zu betrachten, deren sie fähig sind, um eine neue Herausgabe ersucht, und mehrere Gelehrte haben mich angelegentlich dazu aufgemuntert. Es schien mir auch, daß man noch einige Gegenstände, zur Erleichterung der Lectüre des Buches, weiter entwickelt zu sehen wünschte; und ich habe diesen Wunsch erfüllt. Diese weiteren Auseinandersetzungen haben aber eine neue Ordnung der Materien nothwendig, und das Manuscript stärker gemacht. Und da durch diese Veränderungen ein, auf gewisse Art, wenigstens der Form nach, ganz neues Werk entstanden ist, so habe ich auf gleiche Weise einen andern Titel dafür gewählt, der mir der generellen Behandlung, auf die ich mich beschränkt habe, angemessener schien.

Was die Grundsätze selbst betrifft, so habe ich, außer dem, was auf das berüchtigte Princip der kleinsten Wirkung Bezug hat, wenig hinzugefügt.

Maupertuis hat, wie bekannt, die erste Idee dieses Prinzips aufgestellt, sowohl für den Fall, wo sich die Bewegung in unmerklichem Grade ändert, als auch für den, der gewaltsamen Veränderungen. Aber, so wie er, wenn ich so sagen darf, nur einen flüchtigen und vagen Blick auf dieß Prinzip warf, welches er aus den caussis finalibus hergenommen hatte, so machte er auch keinen Unterschied zwischen den beyden eben genannten Fällen. Dieser Unterschied ist indeß sehr groß; und um das Prinzip der kleinsten Wirkung auf einen derselben anzuwenden, und dadurch dem Ausdruck desselben die nöthige Klarheit und mathematische Kürze zu geben, muß man zwey verschiedene Sätze daraus machen, die nichts mit einander gemein haben; oder es geht vielmehr daraus hervor, daß es zwey bestimmte und scharfe, aber ganz von einander verschiedene Prinzipien sind, zu denen das schwankende Prinzip von Maupertuis die Veranlassung gegeben hat, das eine ausschließlich anwendbar auf den Fall, wo die Bewegung sich in einem unmerklichen Grade ändert, das andere ausschließlich auf den Stoß der Körper oder auf die gewaltsamen Veränderungen der Bewegung.

Euler, ohne auf die metaphysische, von den Endursachen hergenommene, Erklärung Verzicht zu thun, sonderte zuerst den ersten der beyden Fälle von dem zweyten ab, gab eine strenge Darstellung dieses ersten Falls, und wandte ihn besonders auf eine krumme Linie an, die ein den Gesetzen der Attraction unterworfener beweglicher Körper beschreibt, setzte aber keinesweges hinzu, daß sich dieß Prinzip auf jedes System aller, ähnlichen

Gesetzen unterworfener, und auf irgend eine Art, es sey unmittelbar, oder durch Maschienen, auf einander einwirkender Körper, erstrecken müsse. Aber es kam darauf an, dieß festzusetzen und zu beweisen; und dieß that Lagrange mittelst der neuen Rechnungsart, die er erfunden hatte, und die er Variationsrechnung nannte. Er bewies auf die schönste Weise, daß Eulers Proposition für den Fall, wo die Bewegung sich in unmerklichen Graden ändert, in der That allgemein wäre für jegliches System von Körpern, welche den Gesetzen der Attraction, die in Verhältniß irgend einer Function der Distanzen ausgeübt wird, unterworfen sind. Er zeigte ferner, wie man aus dieser Proposition, in jedem besondern Falle, den Zustand der Bewegung des ganzen Systems für jeden Augenblick ableiten kann. Und dieser schönen Proposition nun hat man eigentlich den Namen des Prinzips der kleinsten Wirkung gegeben.

In Rücksicht dessen, was den andern Fall, das heißt, den Satz von Maupertuis, in so fern betrifft, als er sich auf den Stoß der Körper, oder auf die gewaltsamen Veränderungen aller Art bezieht, so weiß ich bis jetzt niemand, der vor der ersten Ausgabe des gegenwärtigen Werks versucht hätte, ihn bündig auszudrücken, oder ihn mit schärferen Gründen zu beweisen. Ich glaube selbst, daß man ihn immer, wegen der Unbestimmtheit, in der ihn sein Urheber gelassen hatte, wenigstens für zweifelhaft und der Aufmerksamkeit der Geometer für unwürdig angesehen hatte. Aber es ist ausgemacht, daß man diese Unbestimmtheit wegbringen kann, und daß ein sehr schöner Grundsatz daraus hervorgeht, der allein und unabhängig von jedem andern hinreicht, um in allen möglichen Fällen den Stand der Ruhe oder der Bewegung irgend eines Systems von Körpern zu finden, wo einer auf den andern durch Stoß oder gewaltsame

Veränderungen wirkt, es sey nun unmittelbar, oder durch Vermittelung der Maschienen.

In dieser neuen Ausgabe habe ich das, was ich in der ersten über diesen Satz gesagt hatte, weiter entwickelt und gezeigt, daß dieß Prinzip eben so gut für Körper mit verschiednen Graden von Elastizität, als wie für harte Körper gilt.

Uebrigens unterschied sich die ganze Methode, die ich bey der ersten Ausgabe dieses Werks befolgt habe, im Allgemeinen von der gewöhnlichen hauptsächlich darinne, daß ich alles auf den Stoß der Körper, oder auf die gewaltsamen Veränderungen bezog, und daß ich den bloßen Druck, durch welchen die in unmerklichen Graden bewirkten Veränderungen entstehen, nur als einen besondern Fall der allgemeinen Aufgabe ansah. Folglich konnte sich meine Methode nicht streng auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten stützen, dessen Wichtigkeit jetzt durch den Gebrauch, den Lagrange in seiner Mechanik davon gemacht hat, so anerkannt ist, das sich aber nicht ohne Modification auf den Stoß der Körper anwenden läßt. Ich ging daher von einem andern Prinzipe aus, welches aber dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten sehr analog, oder vielmehr nichts anders, als dieses Prinzip selbst, nur gehörig verallgemeinert, ist. Diese Verallgemeinerung bestand darinne, daß ich an die Stelle der virtuellen Geschwindigkeiten, welche unendlich klein sind, endliche Geschwindigkeiten setzte, die ich geometrische genannt habe; und diese Basis habe ich in der gegenwärtigen Ausgabe beybehalten. Hieraus entspringt eine Art von neuer Theorie über eine Klasse von Bewegungen, die weniger in das Fach der Mechanik, als das der Geometrie gehört. Diese geometrischen Bewegungen sind diejenigen, welche die verschiedenen Theile eines Systems von Körpern, ohne sich einander im Wege zu seyn, nehmen können, und die folglich, da sie gar nicht von der Wirkung und Gegenwirkung der Körper, sondern bloß von der Beschaffenheit ihrer Verbindung unter einander abhängig sind, sich auch schon durch bloße Geometrie, unabhängig von den Regeln der Dynamik, bestimmen lassen.

Die Mechanik läßt sich in ihren Prinzipien auf zweyerley Art betrachten. Einmal kann man sie ansehen, als die Theorie der Kräfte, das heißt der Ursachen, welche die Bewegung hervorbringen. Man kann sie aber auch ansehen, als die Theorie der Bewegungen selbst. Im erstern Falle stellt man Untersuchungen über die Ursachen, welche es auch seyn mögen, an, die den Körpern, auf welche man sie angewandt denkt, Bewegung mittheilen, oder mitzutheilen streben. Im zweyten Falle denkt man sich die Bewegung als schon mitgetheilt, als schon bekommen und den Körpern inwohnend; und man forscht bloß den Gesetzen nach, nach welchen die empfangenen Bewegungen sich fortpflanzen, und sich bey jeder Veränderung der Umstände einander modificiren oder auch aufheben. Jede von diesen beyden Ansichten der Mechanik hat ihre Vortheile und ihre Nachtheile. Der ersten, als der einfachsten, ist man beynahe überall gefolgt, aber sie hat den Nachtheil, daß sie sich auf einen dunkeln metaphysischen Begriff, wie der der Kräfte ist, gründet. Denn welche klare Idee kann der Name Ursache dem Geiste bey einem solchen Gegenstande wohl darstellen? Der Arten von Ursachen sind so viele. Und was kann man sich in der bündigen Sprache der Mathematik unter einer Kraft, das heißt, unter einer wirkenden Ursache denken, die das doppelte oder dreyfache einer andern wäre? Man versteht bey der Rechnung vollkommen, was es heißt, zwey Größen der Bewegung in einem gegebenen Verhältniß; aber in welchem Verhältniß stehen zwey ganz verschiedene Ursachen zu einander? Sind diese Ursachen der Wille, oder die physische Constitution des Menschen, oder des Thieres, welches durch seine Handlung die Bewegung entstehen macht? Aber was bedeutet der Ausdruck, ein Wille, der das Doppelte oder Dreyfache eines andern Willens ist, oder eine physische Constitution, die eine doppelt oder dreymal so große Wirkung hervorbringen kann, als eine andere? Der Begriff des Verhältnisses der Kräfte unter sich, als Ursachen gedacht, ist um nichts deutlicher, als der der Kräfte selbst.

Wenn man sich zu der Parthey schlägt, welche die Ursache gar nicht von der Wirkung trennt, das heißt, wenn man unter dem Worte Kraft, die Größe der Bewegung selbst versteht, die sie in den beweglichen Körpern, auf welche sie einwirkt, hervorbringt; so wird man verständlich; aber dann kommt man bestimmt auf die zweyte Art, den Gegenstand zu betrachten, zurück, das heißt, dann ist die Mechanik nichts anders, als die Theorie der Gesetze für die Mittheilung der Bewegungen. Aber so lange, als man das Wort Ursache als der Vorstellung von etwas erstem, anfänglichem entsprechend, ansieht, so muß man eingestehen, daß die Unbestimmtheit da ist, von der eben die Rede war, und daß alsdann alle die Demonstrationen, wo das Wort, Kraft, angewandt wird, den Charakter einer schlechterdings unvermeidlichen Dunkelheit an sich tragen: und darinn liegt der Grund, warum es in diesem Sinne, meiner Meinung nach, z. B. keinen strengen Beweis von dem Parallelogramm der Kräfte geben kann; die bloße Gegenwart des Wortes Kraft, in dem Ausdrucke des Satzes macht diesen Beweis, zufolge der Natur der Sache selbst, schon unmöglich. Darum sagt der große Euler: „es ist immer außerordentlich schwer, über die ersten Prinzipien unserer Kenntnisse zu raisonniren, und wir sind mehr bestimmt, unsere Vermögen zu gebrauchen, als ihre Natur zu ergründen".

Diese Dunkelheit verschwindet, wie ich eben gesagt habe, bey der zweyten Ansicht der Mechanik; aber es entsteht da ein anderer Nachtheil; der nämlich, daß die Grundprinzipien, die man im erstern Falle als Axiome, zu Gunsten des gebrauchten metaphysischen Ausdrucks, nämlich des Wortes **Kraft**, aufstellt, in diesem zweyten Falle nichts weniger, als evidente Sätze sind, und man, um sie festzusetzen, bald die Nothwendigkeit fühlt, zur Erfahrung seine Zuflucht zu nehmen.

So z. B. macht man im erstern Falle keine Schwierigkeit, als Axiom anzunehmen, daß eine Kraft in jedem beliebigen Punct ihrer Richtung als vorhanden angesehen werden kann: im zweyten aber kann man nicht sagen, daß die Bewegung eines Körpers da existire, wo dieser Körper selbst nicht zugegen ist. Im erstern Fall begreift man, wenn man einmal bey der Dunkelheit des Begriffs des Wortes Kraft vorüber ist, was der Ausdruck bedeutet: mehrere Kräfte wirken in einem und ebendemselben Punct nach verschiedenen Richtungen; im zweyten kann man nicht begreifen, was es heißen solle: Größen der Bewegung, nach verschiedenen Richtungen gehend, und dennoch in einem und demselben Körper beysammen, da ja doch dieser Körper nicht mehrere Wege auf einmal durchlaufen kann; man kann daher diese verschiedenen Bewegungen nicht anders, als in verschiedenen Körpern selbst sich denken, die durch ihren Stoß auf einander gezwungen werden, sich anders zu bewegen; und es ist nun das Gesetz dieser Veränderungen aufzusuchen.

Im erstern Fall, wenn man den Begriff der Kräfte einmal zugelassen hat, ist es leicht, die Gesetze der Statik festzusetzen, und von da aus gelangt man, vermittelst des Grundsatzes von Jakob Bernoulli, und D'Alembert zu den Gesetzen der Bewegung; bey dem letztern Falle hingegen muß man mit der Dynamik den Anfang machen, und die Statik bloß als einen besondern Fall der allgemeinen Prinzipien betrachten; den nämlich, wo alle Bewegungen sich vernichten.

Die erste Methode ist daher weit leichter und auch, wie ich eben bemerkt habe, fast allgemein befolgt worden. Dem ungeachtet habe ich hier, wie ich es auch schon in der ersten Ausgabe gethan hatte, die zweyte angenommen, weil ich den metaphysischen Begriff der Kräfte vermeiden, die Ursache nicht von der Wirkung unterscheiden, und, mit einem Worte, alles auf die bloße Theorie von der Mittheilung der Bewegungen zurückführen wollte.

Wenn man diesen Weg einschlägt, so erkennt man bald, wie ich bereits oben gesagt habe, die Nothwendigkeit, zur Erfahrung zurück zu gehen; und dieß habe ich gethan, ohne jedoch im geringsten zu verabsäumen, mich auf die Vernunftschlüsse zu stützen, die sie auf die beste Art bestätigen, oder welche dazu dienen können, die Resultate derselben durch Induction allgemein zu machen. Ich habe selbst einigemal das Wort Kraft in der unbestimmten Bedeutung, von der ich oben gesprochen habe, gebraucht: ich habe z. B. einen Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten gegeben, der für ganz genau gelten könnte, wenn dieser Begriff der Kräfte einmal zugegeben wäre; aber alles, was ich auf diesen Begriff gebaut habe, das habe ich nur als einen Wink, als eine Andeutung gegeben, die bloß geeignet ist, den Gang der strengern Untersuchungen, zu denen man immer zurück kommen muß, zu leiten. Nachher habe ich auch einen Beweis desselben Prinzips geführt, der einzig auf die Gesetze der Mittheilung der Bewegungen gegründet ist; es ist dieß der nämliche Beweis, welchen ich schon in der ersten Ausgabe gegeben, hier aber mit aller der Sorgfalt, die ein so wichtiger Grundsatz verdient, weiter entwickelt habe.

Das Werk ist in zwey Theile getheilt; der erste ist eigentlich der experimentelle Theil, das heißt, derjenige, welcher die vorläufigen Begriffe und die Thatsachen, auf welche sich die Mechanik gründet, entwickelt, und nach Analogie weiter ausgedehnt enthält, in so weit es nöthig schien, um das Schwankende bey den allgemeinen Grundsätzen, die aus ihnen abgeleitet werden, zu vermeiden.

Der zweyte fängt bey dem Puncte an, wo, nach meiner Ansicht, die Wissenschaft aufhört, experimentell zu seyn, und durchaus rationell wird, das heißt, da, wo mir die Prinzipien durch die Erfahrung hinlänglich befestigt schienen, um weiterhin nichts anderen, als des Raisonnements, mehr zu bedürfen. Er enthält die Folgerungen, welche man aus den ersten Grundsätzen, wenn diese einmal anerkannt sind, streng ziehen kann, und die Formeln, die sie ausdrücken, und dadurch macht er die Wissenschaft der Anwendung des analytischen Calculs fähig.

Ich habe das Werk, wie in der ersten Ausgabe, mit allgemeinen Reflexionen über die Anwendung der Kräfte zur Bewegung der Maschienen beschlossen; überall weiß man und sagt es immer wieder, daß man bey der Bewegung von Maschienen das an Zeit oder Geschwindigkeit verliert, was man an Kraft gewinnt, und demungeachtet trifft man alle Augenblicke noch auf Personen, die, ob sie gleich dieses Prinzip wissen, sich dennoch nicht entschließen können, tausend alberne und abgeschmackte Projecte aufzugeben. Sie denken immer noch, daß in den Maschienen eine Zauberey steckt. Die Beweise, welche man ihnen von dem Gegentheil giebt, erstrecken sich gewöhnlich bloß auf die einfachen Maschienen; auch halten sie diese keiner großen Wirkung fähig: aber man muß ihnen noch anschaulich machen, daß es damit in allen ordentlichen Fällen eben so seyn muß; man spricht immer nur von dem

Falle, wo bloß zwey Kräfte in dem Systeme vorhanden sind, und begnügt sich für die übrigen mit einer Analogie; daher hoffen aber diese Mechaniker immer noch, daß ihr Scharfsinn ihnen irgend eine unbekannte Quelle wird entdecken lassen, eine Maschiene, die nicht unter den gewöhnlichen Regeln mit begriffen ist; sie glauben sie um so sicherer zu finden, je mehr sie sich von alle dem entfernen, was Aehnlichkeit mit den gewöhnlichen Maschienen hat, weil sie sich einbilden, daß die für die letzteren gegründete Theorie sich nicht auf Maschienenwerke erstrecken könne, die ihnen damit keine Aehnlichkeit zu haben scheinen; umsonst sagt man ihnen, daß sich jede Maschiene auf den Hebel zurückführen läßt; diese Behauptung ist zu unbestimmt und zu weit hergeholt, als daß man sich ihr ohne eine tiefe Untersuchung ergeben sollte; sie können sich nicht überzeugen, daß Maschienen, die nichts mit denen, welche man einfach nennt, gemein zu haben scheinen, dem nämlichen Gesetze unterworfen seyn sollten, noch daß man über die Unnützigkeit eines Geheimnisses aburtheilen könne, welches sie noch niemandem vertrauet haben; daher kommt es, daß die ungereimtesten und von der für die Maschienen so vortheilhaften Einfachheit am weitesten sich entfernenden Ideen ihnen gerade die meiste Hoffnung einflößen.

Das Mittel, diesen Irrthum zu zerstören, ist unstreitig das, zu zeigen, daß nicht allein bey allen bekannten Maschienen, sondern auch bey allen noch möglichen, dieß ein unfehlbares Gesetz ist, daß man immer an Zeit oder Geschwindigkeit das verliert, was man an Kraft gewinnt, und die Bedeutung dieses Gesetzes deutlich zu erklären; aber man muß sich zu diesem Zweck zu der größtmöglichsten Allgemeinheit erheben, sich an keine besondere Maschiene halten, und sich auf keine Analogie stützen, mit einem Worte, es bedarf eines allgemeinen Beweises, der unmittelbar und geometrisch aus den ersten Axiomen der Mechanik abgeleitet ist; dieß ist es, was hier zu thun versucht worden ist. Bey diesem Fundamentalpunct ist besonders verweilt worden; aber ich weiß nicht, ob es geglückt ist, ihn in ein gehöriges Licht zu setzen. Es ist versucht worden, darzuthun, welches der eigentliche Zweck der Maschienen ist; und wenn es unvernünftig ist, über alle Wahrscheinlichkeit hinaus Wunder von ihnen zu erwarten, so wird man sehen, daß ihnen noch genug Gegenstände von Nutzen übrig bleiben, um die glänzendste Einbildungskraft zu beschäftigen.

Die Betrachtungen, die ich über dieß Gesetz anstelle, führen mich darauf, ein

Wort über das perpetuum mobile zu sagen, und ich werde nicht allein zeigen, daß jede Maschiene, die sich selbst überlassen ist, still stehen, oder zum Stillstand kommen muß, sondern ich bezeichne selbst den Augenblick, wo dieß geschehen muß.

Man wird unter diesen Betrachtungen noch eine der interessantesten Eigenschaften der Maschienen kennen lernen, die, wie ich glaube, noch nicht bemerkt worden ist: nämlich, daß, um durch sie die größtmöglichste Wirkung hervorzubringen, keine Erschütterung Statt finden darf, das heißt, die Bewegung muß sich immer in unmerklichen Graden verändern. Dieß giebt, unter andern, Gelegenheit zu einigen Bemerkungen über die hydraulischen Maschienen.

Uebrigens muß man hier kein Lehrbuch der Mechanik erwarten; mein Vorsatz ist, wie es auch der Titel sagt, bloß gewesen, die allgemeinsten Grundsätze derselben, so genau als ich es nur im Stande war, aus einander zu setzen.

Grundsätze des Gleichgewichts und der Bewegung.

Erste Abtheilung.

Vorläufige Begriffe. Hypothesen, die als allgemeine Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung angenommen werden. Folgerungen aus diesen Hypothesen.

1. Diese erste Abtheilung enthält eigentlich bloß eine Darstellung der Grundsätze, die in der zweiten bewiesen werden sollen. Sie giebt einen vorläufigen Ueberblick über diese gesammten Grundsätze, um ihren Geist zu studiren, um sich mit den Kunstausdrücken vertraut zu machen, und ihre Bedeutung fest zu setzen, nicht sowohl durch gedrängte Definitionen, die beinahe immer für die, denen sie neu sind, auch dunkel bleiben, als vielmehr durch Auseinandersetzungen, die unsern gewöhnlichen Empfindungen gemäß sind, und durch mannigfaltige Zusammenstellungen, wodurch nach

und nach die Unbestimmtheit verschwindet, welche gewöhnlich zu kurz dargestellte Begriffe begleitet.

Dieß heißt aber nicht so viel, daß ich eben in dieser ersten Abtheilung die Genauigkeit in den Ausdrücken vernachlässigt hätte; nein, im Gegentheil, ich habe mit so viel Genauigkeit und Bündigkeit dabei verfahren, als mir nur möglich war; ich habe darinn die Resultate der Erfahrung durch solche Vernunftschlüsse, die ich für die besten und überzeugendsten hielt, befestigt, und mich dabei dieser Vernunftschlüsse bedient, um jene isolirten Resultate durch Induction allgemein zu machen.

2. Die Alten haben den allgemeinen Grundsatz aufgestellt, daß alle unsere Vorstellungen durch die äußern Sinne entstehen; und diese große Wahrheit ist itzt keinem Streite mehr unterworfen.

Daraus folgt, daß jede Wissenschaft ihre ersten Grundsätze aus der Erfahrung hernimmt, weil die ersten Vorstellungen, die sie an einander reihen kann, das Resultat von Empfindungen ausmachen, die nichts anders sind, als das, was uns durch Erfahrung gegeben ist.

„Woher nimmt der Mensch", sagt Locke, „alle diese Materialien, die gleichsam den Grund seines ganzen Raisonnements und aller seiner Kenntnisse ausmachen? Ich antworte darauf mit einem

Worte, aus der Erfahrung. Diese ist die Grundlage aller unserer Kenntnisse; daher entstehen sie ursprünglich". S. Locke's Essay on human understanding.

Das gilt für alle Wissenschaften, selbst für die abstractesten, und für die reine Mathematik ganz besonders; denn diese Wissenschaft ist nichts anders, als eine Menge Reihen von Vernunftschlüssen über die Größe. Nun aber, so abstract man auch die Größe betrachten kann, so ist doch die Idee, die man sich von ihr macht, immer das Resultat der Erfahrung, weil wir sie durch gar nichts anders, als durch unsere Sinne bekommen können.

3. Doch werden nicht alle Wissenschaften auf gleiche Weise durch die Erfahrung begründet, wie z. B. die reine Mathematik weniger, als alle andere. Dann folgen die physisch-mathematischen Wissenschaften, alsdann die physikalischen, und unter diesen wieder einige mehr, als die andern, je nachdem es mehr oder weniger schwer ist, die Thatsachen durch Analogie zu verbinden, sie auf allgemeine Phänomene zurück zu führen, und sie einem mehr oder minder genauen Maaßstabe der Vergleichung zu unterwerfen.

4. Es würde ohne Zweifel etwas sehr gutes seyn, wenn man in jeder Wissenschaft den Punct genau bestimmen könnte, wo sie aufhört, experimentell zu seyn, und durchaus rationell wird, das

heißt, wenn man die Wahrheiten auf die möglichst kleinste Anzahl zurück bringen könnte, die man von der Beobachtung entlehnen muß, und die, wenn sie einmal festgesetzt sind, nun durch bloße Aneinanderreihung durch den Verstand alle Zweige der Wissenschaft völlig umfassen. Allein, dieß scheint sehr schwer zu seyn. Indem man durch das bloße Raisonnement zu hoch steigen will, läuft man Gefahr, dunkle Definitionen und schwankende, nicht strenge Beweise zu geben. Es hat weniger nachtheilige Folgen, mehr Thatsachen aus der Erfahrung herzunehmen, als durchaus nöthig seyn würden; der Gang, den man nimmt, kann bloß etwa nicht so schön erscheinen; er ist indeß fester und sicherer.

5. Die ersten nützlichen Schritte, welche die Philosophen bei der Erforschung der Naturgesetze gethan haben, sind gewiß die gewesen, daß sie die Phänomene mit einander verglichen, von denen unsere Augen afficirt werden, daß sie ferner dieselben eins durch das andere erklärten, und daß sie über die rohe Praxis, woraus die Künste bei ihrer Entstehung bestanden, weiter reflectirten, um sie zu vervollkommnen. „Wenn das Alter der Mechanik", sagt Bossut, „sich schon von dem Gebrauche herdatirte, den man nothwendig von dem Hebel, oder von einigen andern einfachen Maschinen machen mußte, so bald man nur Hütten bauen, und Werkzeuge für den Ackerbau verfertigen wollte, so würde dasselbe beynahe bis zum Ursprung der

menschlichen Gesellschaft hinauf steigen". S. d. Mecanique, Discours preliminaire.

6. Es ist demnach die Erfahrung, woraus die Menschen die ersten Begriffe der Mechanik geschöpft haben. Indeß die Grundgesetze des Gleichgewichts und der Bewegung, die ihr zur Basis dienen, bieten sich eines theils so von selbst und natürlich dem Verstande dar, andern theils dringen sie sich auch so klar durch die allergemeinsten Thatsachen auf, daß es auf den ersten Blick schwer zu entscheiden zu seyn scheint, ob wir die vollkommne Ueberzeugung von diesen Gesetzen mehr jenem, oder diesem verdanken, und ob diese vollkommne Ueberzeugung Statt finden würde, wenn nicht beyde, der Verstand und die Thatsachen gemeinschaftlich dafür sprächen. Diese Thatsachen liegen uns allzunahe, als daß wir wüßten, bis zu welchem Punct der bloße Verstand seine Definitionen ohne sie würde festsetzen können, und umgekehrt, sie würden uns, wenn der Verstand nicht dazu diente, diese Thatsachen durch Analogie zu verbinden, zu isolirt erscheinen, als daß wir sie zu Grundsätzen erheben könnten. Diese Grundwahrheiten nun, von welchen einige glauben, daß sie sich durch bloßes Raisonnement darthun lassen, andere hingegen sie als die bloßen einfachen Resultate der Erfahrung ansehen; diese Grundwahrheiten, sage ich, sind es nun, welche ich in diesem ersten Theile aus einander setze, wobey ich mich auf die eine, wie auf die andere dieser Basen stütze, ohne weiter zu un-

tersuchen, ob, nach dem Ausdruck in dem Programm der Berliner Akademie, diese Wahrheiten nothwendig oder zufällig sind.

Grundvorstellungen über Materie, Raum, Zeit, Ruhe, Bewegung, u. s. w.

7. Die erste Regel, die bey einer so delikaten Untersuchung, als die der Naturgesetze ist, festgesetzt werden muß, ist die: keine andern Begriffe als wahr anzuerkennen, als solche, die so klar sind, als es die Grenzen unsers Geistes nur mit sich bringen. Wir müssen darum die Definitionen von Materie, Zeit, Raum, Ruhe, Bewegung verwerfen, da dieß Ausdrücke sind, die sich unmöglich in andere deutlichere übersetzen lassen, und müssen die Ideen, welche diese Ausdrücke in uns erregen, als ursprüngliche Ideen ansehen, über welche hinaus zu gehen, unmöglich ist.

Aber haben wir diese Ausdrücke einmal angenommen, so werden wir leicht verstehen, was ein Körper, eine Geschwindigkeit, eine bewegende Kraft 2c. ist.

8. Der Körper ist ein bestimmter Theil oder Stück von Materie.

9. Der scheinbare Raum, den ein Körper einnimmt, heißt sein Umfang, oder sein Volu-

men; der wirkliche Raum aber, den der nämliche Körper einnimmt, oder seine wirkliche Quantität von Materie, heißt seine Masse.

Wenn nun der Körper von der Beschaffenheit ist, daß gleichen Theilen seines Volumens immer gleiche Theile seiner Masse entsprechen, so sagt man, er ist von gleicher Dichtigkeit, oder er ist gleich dicht in allen seinen Theilen, und das Verhältniß der Masse zum Volumen, oder der Quotient des einen, dividirt durch den andern, heißt die Dichtigkeit dieses Körpers.

Wenn aber gleichen Volumen ungleiche Massen entsprechen, so sagt man, die Dichtigkeit ist verschieden; und für jedes Theilchen der Materie, heißt Dichtigkeit das Volumen dieses Theilchens, dividirt durch seine Masse, oder vielmehr der letzte Grund dieser beyden Größen.

Die leeren Stellen oder Zwischenräume zwischen den Theilen der Materie, welche machen, daß das Volumen, oder der scheinbare Raum größer ist, als der wirkliche, heißen Poren.

10. Die Erfahrung lehrt, daß alle bekannte Körper porös sind, daß sich aber ihre Masse nicht weiter reduciren läßt. In der That gehört eigentlich diese Irreducibilität nicht ausschließlich der Materie an; denn wenn man z. B. einen Cubikfuß Wasser in ein Gefäß einschlösse, das zwey

Cubikfuß fassen könnte, so möchte man dieß Gefäß fortschaffen und bewegen, wie man wollte, es bliebe immer ein Cubikfuß Wasser und ein Cubikfuß leerer Raum. Der leere Raum kann also eben so wenig in einen geringern Raum zurückgedrängt werden, als der erfüllte; aber diese Incompressibilität, in so fern sie als in den Körpern befindlich gedacht wird, heißt Undurchdringlichkeit.

11. Die Körper haben noch andere Eigenschaften, die man in der Mechanik in Betrachtung zieht. Dergleichen sind: die Dichtigkeit, die Flüssigkeit, die Starrheit, die Biegsamkeit, die Härte, die Elasticität und die Weichheit. Die Begriffe, welche wir von diesen verschiedenen Eigenschaften haben, liegen zu sehr in dem ursprünglichen Wesen der Dinge, als daß man eigentliche Definitionen von ihnen geben könnte; wir müssen uns auf Beziehungen einschränken, die hinreichend sind, um unter ihnen zweydeutige Unterscheidungen fest zu setzen.

12. Feste Körper sind solche, von deren Theilen einer an dem andern hängt, wie z. B. der Stein, das Holz u. s. w.

Flüssig sind diejenigen, welche in so feine Theile getheilt sind, daß sie allen, auch mit den besten Instrumenten bewaffneten Sinnen unerreichbar sind. Von der Art ist das Wasser, die

Luft. Ein vollkommen flüssiger Körper würde das Ziel seyn, welchem sich alle diese Flüssigkeiten mehr oder weniger nähern, je nachdem die Feinheit der Theilchen mehr oder minder vollkommen ist. Man weiß nicht, ob ein solcher flüssiger Körper existirt.

13. Die Starrheit, oder Unbiegsamkeit ist die Beschaffenheit der Körper, daß man sie nicht biegen, oder krümmen kann, wie man sie gewöhnlich den Balken oder andern Instrumenten in Gedanken zuschreibt, die man dazu braucht, um beträchtliche Lasten aufzuheben, zu tragen oder fortzuschieben.

Die Biegsamkeit, oder Nachgiebigkeit im Gegentheil ist die Beschaffenheit derjenigen Körper, welche ohne große Anstrengung gebogen werden können, wie man sie den Fäden oder Seilen zuschreibt, mit denen man Knoten macht, zusammen bindet, oder Lasten fortziehet, sei es unmittelbar durch sie, oder indem man sie über Rollen, über Kloben u. dergl. gehen läßt.

14. Die Härte, oder Unzusammendrückbarkeit ist diejenige Beschaffenheit gewisser Körper, vermöge welcher sie keine Veränderung ihres Volumens zulassen, ob sie gleich, wie alle andere, porös sind. Das Wort Härte wird vorzüglich von festen Körpern gebraucht, und das der Unzusammendrückbarkeit oder Incom-

pressibilität von den flüssigen: man glaubt, daß die aller kleinsten Theilchen aller Körper hart sind. Das Wasser ist ein flüssiger Körper, der nicht zusammengedrückt werden kann.

Die Elasticität ist die Beschaffenheit gewisser zusammendrückbarer Körper, vermöge welcher sie von selbst ihre vorige Gestalt wieder annehmen, wenn der Druck aufhört. Ein vollkommen elastischer Körper würde derjenige seyn, bei welchem die Zusammendrückung und Wiederherstellung des Volumens in den nämlichen Graden nach entgegengesetzter Richtung erfolgte. Diese Körper heissen elastisch, oder federhart. Elfenbein, Stahl, Glas sind feste elastische Körper; die Luft, die Gasarten sind elastische Flüssigkeiten.

Weiche Körper sind solche, die, wenn sie zusammen gedrückt worden sind, in dem Zustande bleiben, in welchen sie die Zusammendrückung versetzt hat, wie das Blei, die Thonerde rc. Uebrigens liefert uns die Natur keinen vollkommen harten, vollkommen elastischen, oder vollkommen weichen Körper. Man nimmt sie in der Abstraction als solche an, und denkt sie sich, als das Ziel der wirklichen Gegenstände, als Grenzen, die unsere Sinne afficiren.

15. Die Mechanik ist die Wissenschaft, welche, unter allen Umständen, den jedesmaligen Zustand der Ruhe, oder der Bewegung eines ge-

gebenen Systems von Körpern, das heißt, die Verhältnisse kennen lehrt, welche zwischen den Massen dieser Körper, den Räumen, welche sie zu beschreiben streben, denjenigen, welche sie wirklich durchlaufen, und den Zeiten, welche sie dazu brauchen, statt findet. Sie theilt sich in zwey Theile, die Statik und die Dynamik.

Die **Statik** betrachtet den Zustand des **Gleichgewichts**, das heißt, den Zustand eines Systems von Körpern, welches in Ruhe verharrt, ungeachtet des Bestrebens, welches ein jeder von ihnen besitzt, sich zu bewegen.

Die **Dynamik** betrachtet den Zustand der Bewegung, welche ein System von Körpern, zufolge der besondern einzelnen Tendenzen derselben, annimmt, und des Widerstandes, welchen sie, zufolge ihrer Undurchdringlichkeit, thun und finden können.

Die **Mechanik**, die **Statik** und die **Dynamik** flüssiger Körper heißen **Hydraulik**, **Hydrostatik**, und **Hydrodynamik**.

16. Die Masse der Körper, der Raum, welchen sie durchlaufen, und die Zeit, welche sie hierzu anwenden, greifen in der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung auf mancherley Weise in einander; und daraus entspringen mehrere Functionen, die sehr oft wieder vorkommen, und de-

nen man, der Kürze wegen, verschiedene eigenthümliche Namen gegeben hat. Die vorzüglichsten unter ihnen sind: Geschwindigkeit, Größe der Bewegung, Kraft, oder Gewalt, beschleunigende, oder verzögernde Kraft, sollicitirende Kraft, bewegende Kraft, lebendige Kraft, Moment, Größe der Wirkung. Wir werden im Folgenden von jeder dieser Größen nach einander einen umständlichen Begriff geben, und zugleich den Ursprung dieses Begriffes entwickeln. Hier wollen wir unterdessen die bloße Definition eines jeden hersetzen.

17. Ein durchlaufener Raum, oder irgend eine Linie, durch eine Zeit dividirt, heißt im Allgemeinen eine **Geschwindigkeit** *).

Eine Masse multiplicirt durch eine Geschwindigkeit, oder das Product einer Masse durch eine Linie, dividirt mit einer Zeit, heißt **Größe der Bewegung.**

*) Da diese beyden Größen, Raum und Zeit, heterogen sind, so ist im strengen Sinne nicht von dem Quotienten des einen durch den andern die Rede; sondern von dem Quotienten der Verhältnisse, in welchen diese Größen zu ihren respectiven Einheiten stehen, dem in der Geometrie angenommenen Gebrauche gemäß, wenn z. B. davon geredet wird, eine Fläche durch eine Linie zu dividiren, oder eine Linie durch die andere zu multipliciren. Dieß ist auf gleiche Weise der Fall in allen Theilen der Mathematik,

Eine Geschwindigkeit, dividirt durch eine Zeit, heißt beschleunigende oder verzögernde Kraft. So ist eine beschleunigende, oder verzögernde Kraft im Allgemeinen der Quotient eines Raumes, oder einer Linie, dividirt durch das Quadrat einer Zeit.

Das Product aus einer Masse, und einer beschleunigenden, oder verzögernden Kraft heißt überhaupt bewegende Kraft.

Unter der bloßen Benennung: Kraft oder Gewalt versteht man die Größen der Bewegung, und die bewegenden Kräfte.

Das Product einer Masse, durch das Quadrat einer Geschwindigkeit, oder durch das Product zweier Geschwindigkeiten, oder, welches auf dasselbe herauskommt, durch das Product einer Linie und einer bewegenden Kraft heißt, lebendige

wenn die Rede davon ist, conkrete Größen durch einander zu multipliciren, oder heterogene Größen durch einander zu dividiren. Es sind nicht diese Größen selbst, welche man durch algebraische Zeichen ausdrückt, sondern abstrahirte Zahlen, welche die Quotienten dieser Größen durch ihre respectiven Einheiten ausdrücken. Diese Bemerkung ist hier ein für allemal gemacht, und gilt für alle Fälle von der nämlichen Art; wir werden nicht wieder auf sie zurückkommen.

Kraft, Moment der bewegenden Kraft, Moment der Thätigkeit.

Das Product einer Masse, durch eine Geschwindigkeit und eine Linie, oder durch das Quadrat einer Geschwindigkeit und einer Zeit heißt: **Moment der Größe der Bewegung**, oder **Größe der Wirkung.**

18. Wenn also im Allgemeinen m eine Masse, e einen Raum, oder eine Liniengröße, und t eine Zeit bedeutet; so heißt:

Jede Größe von dem Ausdruck $\frac{e}{t}$, oder die sich auf diesen Ausdruck reduciren läßt, Geschwindigkeit.

Jede Größe von dem Ausdruck $m\frac{e}{t}$ Größe der Bewegung.

Jede Größe von dem Ausdruck $\frac{e}{t^2}$ beschleunigende oder verzögernde Kraft.

Jede Größe von dem Ausdruck $m\frac{e}{t^2}$ bewegende Kraft.

Jede Größe von dem Ausdruck $m\frac{e}{t}$, oder von diesem $m\frac{e}{t^2}$, heißt bloß Kraft, oder Gewalt.

Jede Größe von diesem Ausdruck $m\frac{e^2}{t^2}$ heißt lebendige Kraft, Moment der bewegenden Kraft, oder Moment der Thätigkeit.

Endlich heißt jede Größe von dem Ausdruck $m\frac{e^2}{t}$ Moment der Größe der Bewegung, oder Größe der Wirkung.

Jetzt wollen wir jeden dieser Begriffe wieder besonders durchgehen.

Von den gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegungen im Allgemeinen; von den Geschwindigkeiten und der Schätzung dieser Geschwindigkeiten, nach jeder beliebigen Richtung.

19. Von einem Körper, der in gleichen Zeiten immer gleiche Räume durchläuft, sagt man, er bewegt sich gleichförmig, und seine Bewegung heißt eine **gleichförmige Bewegung.** Wenn

im Gegentheil gleichen Zeiten ungleiche Räume entsprechen, heißt die Bewegung veränderliche, oder ungleichförmige Bewegung.

20. Bey der gleichförmigen Bewegung nennt man Geschwindigkeit (17.) das Verhältniß des durchlaufenen Raumes zu der Zeit, die dazu angewandt worden ist, ihn zu durchlaufen; oder den Quotienten des erstern durch die zweyte.

21. Weil bey der gleichförmigen Bewegung, die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume immer gleich sind, so folgt daraus, daß der in irgend einer Zeit durchlaufene Raum, dividirt durch diese Zeit, immer derselbe ist, das heißt, daß in einer gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit sich gleich bleibt.

22. Wenn die Bewegung ungleichförmig ist, so nimmt man einen unendlich kleinen Zeitraum an, und nennt, für jeden Augenblick, Geschwindigkeit des beweglichen Körpers, das Verhältniß des unendlich kleinen, in diesem Augenblick durchlaufenen Raumes zu der Dauer dieses nämlichen Augenblicks, oder genauer, das letzte Verhältniß dieser beyden Größen zu einander.

23. Wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer um gleich viel wächst, so heißt die Bewegung gleichförmig-beschleunigt. Wenn sie im Gegentheil in gleichen Zeiten immer um

gleich viel abnimmt, so heißt sie gleichförmig-vermindert, oder retandirt.

24. Man unterscheidet die Geschwindigkeiten in absolute und relative. Die absolute Geschwindigkeit eines Körpers ist seine reelle und wirkliche Geschwindigkeit; oder diejenige, nach welcher sich die Größe messen läßt, um welche er sich den Gegenständen, welche als unbeweglich im Raume angesehen werden, nähert oder sich von ihnen entfernt. Die relative Geschwindigkeit zweyer Körper im Gegentheil ist diejenige, welche dazu dient, die Größe zu messen, um welche sich diese Körper, in einer gegebenen Zeit, einander nähern, oder von einander entfernen. Es ist uns nicht möglich, gewiß zu entscheiden, ob die scheinbare Geschwindigkeit dieses oder jenes Körpers reell ist, oder nicht, weil wir nicht wissen, ob wir mit ihm in gemeinschaftlicher Bewegung fortgerissen werden, oder nicht, so wie man lange Zeit geglaubt hat, daß die Erde im Raume fest stände, weil man nach dem äußerlichen Scheine urtheilte; und man hat viel Mühe gehabt, um von diesem Irrthume zurück zu kommen.

25. Die gerade Linie, oder die Tangente am Anfangspuncte der krummen Linie, welche ein Körper, der in Bewegung ist, in jedem Augenblick beschreibt, heißt Richtung seiner Geschwindigkeit.

Man stellt die Geschwindigkeiten, was ihren Werth anbetrifft, auf eine gleichmäßige Art dadurch dar, daß man auf ihren Direktionslinien Theile nimmt, die ihrem Werthe selbst proportionirt sind.

26. Die Verzeichnung einer Geschwindigkeit auf irgend einer geraden Linie, wird mit dem Namen einer Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser geraden Linie geschätzt, bezeichnet; das heißt, wenn $\overline{Aa}$ (Fig. 1.) die Geschwindigkeit des Körpers A bedeutet, sowohl in Rücksicht ihrer Größe, als ihrer Richtung, wenn ferner $\overline{AB}$ eine andere gerade Linie, nach Willkühr von dem Puncte A ausgezogen, ist, und wenn man nun von dem Puncte a eine Perpendiculär-Linie $\overline{aa'}$ auf A B herunterfällt, so wird die gerade Linie $\overline{Aa'}$ die Geschwindigkeit $\overline{Aa}$, in der Richtung von $\overline{AB}$ geschätzt, ausdrücken. Nun ist offenbar $\overline{Aa'} = \overline{Aa}.\cos.\, aAB$; das heißt, eine Geschwindigkeit, in der Richtung irgend einer geraden Linie geschätzt, ist nichts anders, als das Product dieser Geschwindigkeit, durch den Cosinus des Winkels, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der gegebenen geraden Linie bildet. Ich werde auch $\overline{Aa'}$ die reducirte Ge-

schwindigkeit (vitesse réduite) nennen, und den Winkel $a\,A\,B$ den Projectionswinkel*).

27. Man nennt im Allgemeinen eine aus mehrern andern einzelnen oder zusammensetzenden (composantes) Geschwindigkeiten, resultirende Geschwindigkeit (vitesse resultante) eine solche, die nach irgend einer Richtung geschätzt, der Summe aller dieser einzelnen Geschwindigkeiten, nach dem nämlichen Werthe geschätzt, gleich ist. —

So z. B. wenn $\overline{A\,a}$ (Fig. 2.) die Geschwindigkeit des Körpers A vorstellt, und man durch den nämlichen Punct A zwey gerade Linien $\overline{A\,b}$, $\overline{A\,c}$, zieht, so daß, wenn man von den Puncten a, b, c, die Perpendikel $\overline{a\,a'}$, $\overline{b\,b'}$, $\overline{c\,c'}$, auf noch eine andere gerade Linie A B, die willkührlich durch den Punct A gezogen ist, herabfällt, beständig $\overline{A\,a'} = \overline{A\,b'} + \overline{A\,c'}$ bleibt, oder $\overline{A\,a}.\ \cos.\ \overline{A\,a}^\wedge\overline{A\,B} = \overline{A\,b}.\ \cos.\ \overline{A\,b}^\wedge\overline{A\,B} + \overline{A\,c}.\ \cos.\ \overline{A\,c}^\wedge\overline{A\,B}$, so wird die Geschwin-

*) In der Folge werde ich mich oft, der Kürze wegen, des Ausdrucks $\overline{A\,a}^\wedge\overline{A\,a'}$ bedienen, um den Winkel zu bezeichnen, der zwischen jeden zwey beliebigen Richtungen eingeschlossen ist.

digkeit $\overline{A\,a}$ die resultirende von $\overline{A\,b}$ und $\overline{A\,c}$, und diese werden die zusammensetzenden Geschwindigkeiten von der erstern seyn, und man wird sagen, daß sich die Geschwindigkeit $\overline{A\,a}$ in zwey andere $\overline{A\,b}$, $\overline{A\,c}$ auflösen läßt.

28. Es ist leicht einzusehen, daß, die einzelnen gegebenen Geschwindigkeiten mögen seyn, von welcher Beschaffenheit, und von welcher Anzahl sie wollen, und man mag sie in einer und der nämlichen Ebne annehmen, oder nicht, es doch immer möglich seyn wird, der angegebenen Bedingung Genüge zu leisten, das heißt, daß es immer eine Geschwindigkeit geben wird, die nach irgend einer Richtung, welche man will, geschätzt, der Summe aller der einzelnen Geschwindigkeiten, nach der nämlichen Richtung geschätzt, gleich seyn wird. Denn es seyen (Fig. 3.) A B, A C, A D, $\overline{A\,E}$ die gegebenen einzelnen Geschwindigkeiten. Man ziehe durch den Punct B eine gerade Linie, $\overline{B\,c}$, gleich und parallel mit $\overline{A\,C}$; durch den Punct c, eine andere gerade Linie $\overline{c\,d}$, gleich und parallel mit $\overline{A\,D}$; und durch den Punct d eine gerade Linie $\overline{d\,e}$, gleich und parallel mit $\overline{A\,E}$. So behaupte ich, daß die gerade Linie $\overline{A\,e}$ die resulti-

rende Geschwindigkeit von allen diesen einzelnen gegebenen Geschwindigkeiten seyn wird.

In der That, es ist einleuchtend, daß, wenn man durch den Punct A irgend eine gerade Linie $\overline{MN}$ zieht, und aus den Ecken B, c, d, e, des Polygons Perpendicular-Linien $\overline{Bb'}$, $\overline{cc'}$, $\overline{dd'}$, $\overline{ee'}$ auf diese gerade Linie $\overline{MN}$ herunterfällt, um auf ihr die Projection dieser Seiten zu bestimmen, die $\overline{Ae'}$ von der geraden Linie $\overline{Ae}$ gleich seyn wird der Summe aller andern, oder der Summe der gegebenen einzelnen Geschwindigkeiten, welche, nach der Voraussetzung, durch gerade Linien ausgedrückt wurden, welche diesen Seiten respective parallel und gleich sind. Nun sind aber diese Zeichnungen der gegebenen Geschwindigkeiten nichts anders, (26.) als dieselben Geschwindigkeiten, nach der Richtung von $\overline{MN}$ geschätzt. Folglich ist die Geschwindigkeit $\overline{Ae}$, nach der Richtung von $\overline{MN}$, welche willkührlich angenommen wird, geschätzt, gleich der Summe aller gegebenen einzelnen Geschwindigkeiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, jede auf eine ähnliche Weise nach der Richtung von $\overline{MN}$ geschätzt. Dieß war es, was bewiesen werden sollte. Der Beweis ist, wie man sieht, eben so anwendbar auf den Fall, wo alle gegebenen einzelnen Geschwindigkeiten in einer und eben derselben Ebene liegen, wie auf den, wo sie sich in verschiedenen Ebenen befinden.

29. Der Fall, wo einige dieser Puncte $\underline{b'}$, $\underline{c'}$, $\underline{d'}$ auf die andere Seite des Punctes A, in Beziehung auf den Punct N fallen sollten, würde keine Ausnahme von der Regel machen. Es würde bloß das Segment, welches ihm correspondirt, umgekehrt, und der Ausdruck dafür in der Gleichung, den Regeln der Analysis gemäß, negativ werden. In der That, es bliebe immer:

$$\overline{Ae}.\ \cos.\ \overline{Ae}\,^\wedge\,\overline{AN} = \overline{AB}.\ \cos.\ \overline{AB}\,^\wedge\,\overline{AN} + \overline{AC}.\ \cos.\ \overline{AC}\,^\wedge\,\overline{AN} + \overline{AD}.\ \cos.\ \overline{AD}\,^\wedge\,\overline{AN} + \overline{AE}.\ \cos.\ \overline{AE}\,^\wedge\,\overline{AN};$$

Aber alsdann würden die den Puncten, welche auf die andere Seite des Punctes A fallen, entsprechenden Winkel stumpf, und mithin ihre Cosinusse negativ werden.

30. Wenn* die zusammensetzenden Geschwindigkeiten sich auf zwey reduciren (Fig. 2.); so wird offenbar alsdann die resultirende Geschwindigkeit, sowohl in Rücksicht ihrer Größe, als ihrer Richtung, durch die Diagonale $\overline{Aa}$ des Parallelogramms A b a c repräsentirt werden, dessen Seiten $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, sowohl in Rücksicht ihrer Größen, als ihrer Richtungen, die einzelnen Kräfte vorstellen würden.

31. Es ist ferner klar, daß der angegebenen Bedingung bloß auf eine einzige Art Genüge geleistet werden, und daß folglich ein jedes beliebiges System von einzelnen Geschwindigkeiten nur eine einzige resultirende geben kann; allein, wenn umgekehrt die resultirende gegeben ist, so wird diese sich auf unendlich viel Arten in einzelne Geschwindigkeiten auflösen lassen, weil man über einer gegebenen geraden Linie, wie $\overline{Ae}$, eine unendliche Menge von Vielecken, die sowohl der Zahl, als der Größe und der Richtungen der Seiten nach verschieden sind, construiren kann.

32. Endlich ist es auch klar, daß man, anstatt die aus den einzelnen Geschwindigkeiten resultirende Geschwindigkeit, durch Hülfe des Polygons ABcde aufzusuchen, zuförderst die resultirende $\overline{Ac}$ aus zweyen von den gegebenen einzelnen Geschwindigkeiten, wie $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, aufsuchen kann; alsdann die resultirende $\overline{Ad}$, aus der erstern gefundenen $\overline{Ac}$ und aus einer der übrigen $\overline{AD}$; und endlich die resultirende $\overline{Ae}$, aus dieser letztern $\overline{Ad}$, und der noch übrigen $\overline{AE}$; und es ist einerlei, nach welcher Ordnung man diese einzelnen Geschwindigkeiten nehmen will, und wie viel ihrer immer seyn mögen.

33. Es sey $\underline{t}$ die Zeit, welche der bewegliche Körper brauchen würde, um die gerade Linie $\overline{Ae}$ gleichförmig zu durchlaufen, wenn er durch die resultirende Geschwindigkeit, welche durch dieselbe gerade Linie $\overline{Ae}$ ausgedrückt ist, in Bewegung gesetzt wäre.

Da die einzelnen Geschwindigkeiten durch $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, ausgedrückt sind, so würde jede dieser geraden Linien respective während derselben Zeit $\underline{t}$ durch den beweglichen Körper zurückgelegt werden; und dieser würde sie mit der Geschwindigkeit durchlaufen, welche sie eben ausdrückt. Da nun die Seiten des Vielecks diesen geraden Linien respective parallel und gleich sind; so ist es klar, daß, wenn der bewegliche Körper alle Seiten des Polygons, nach dem Umfange $ABc\underline{de}$, jede gleichförmig, eine nach der andern, in der Zeit $\underline{t}$ durchläuft, er nach allen diesen einzelnen Bewegungen an dem nämlichen Puncte $\underline{e}$ ankommen muß, wo er, nach der bloßen Zeit $\underline{t}$, angelangt seyn würde, wenn er in dieser Zeit bloß durch die resultirende Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt worden wäre. So kann man, wenn ein beweglicher Körper durch irgend eine beliebige Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt worden ist, ihn gewissermaßen als von allen den einzelnen Geschwindigkeiten, in welche man diese Total-Geschwindigkeit zerlegen kann, zugleich bewegt ansehen.

34. Wenn alle einzelnen Geschwindigkeiten auf der Direction der resultirenden selbst genommen werden; so ist es einleuchtend, daß sie dann der Summe aller dieser gleich seyn muß; und wenn unter diesen einzelnen Geschwindigkeiten einige in gleicher Richtung mit der resultirenden genommen sind, andere in der entgegengesetzten; so ergiebt sich, daß diese die Differenz ist, zwischen der Summe derjenigen zusammensetzenden Geschwindigkeiten, welche nach der Richtung der resultirenden genommen worden sind, weniger der Summe derjenigen zusammensetzenden Geschwindigkeiten, welche man nach der entgegengesetzten Richtung genommen hat.

Von der Größe der Bewegung überhaupt, und den sogenannten gewonnenen und verlohrenen Größen der Bewegung.

35. Im Allgemeinen nennt man Größe der Bewegung (17.) das Product einer Masse durch eine Geschwindigkeit.

Das Product der Masse eines Körpers durch seine Geschwindigkeit, heißt die Größe der Bewegung dieses Körpers.

36. Die Größe der Bewegung eines Körpers läßt sich, wie seine Geschwindigkeit, zerlegen.

Sie ist nichts anders, als das Product dieser durch die Masse des Körpers. So ist, wie die Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers in mehrere einzelne Geschwindigkeiten zerlegt wurde, das Product von jeder dieser einzelnen oder zusammensetzenden Geschwindigkeiten durch die Masse des Körpers eine partielle Bewegungsgröße, und die Totalgeschwindigkeit, oder die resultirende, multiplicirt durch dieselbe Masse, ist die Totalbewegungsgröße, oder die resultirende Größe der Bewegung von allen diesen einzelnen Bewegungsgrößen.

37. Die Idee von der Größe der Bewegung stützt sich auf eine sehr einfache Erfahrung. Nämlich darauf, daß, wenn zwey vollkommen harte Körper, z. B. zwey Kugeln, von gleichen Massen, gegen einander mit direct entgegengesetzten, und gleichen Geschwindigkeiten zusammenstoßen, sie sich nicht allein plötzlich, im Augenblick des Stoßes, einander zum Stillstand bringen, sondern auch, daß, wenn man die Masse des einen verdoppelt, verdreyfacht, vervierfacht ꝛc. während daß man die Geschwindigkeit des andern ebenfalls zwey- drey- oder vierfach ꝛc. nimmt, die Bewegung gleichfalls aufgehoben wird; und diese allgemeine und gänzliche Aufhebung aller Bewegungen ist das, was man Gleichgewicht nennt (15.).

38. Es geht also aus dieser Erfahrung hervor, daß unter diesen harten Körpern ein Gleichgewicht allemal dann Statt finden wird, wenn

ihre Massen sich umgekehrt verhalten, wie ihre Geschwindigkeiten; oder, welches auf dasselbe hinausläuft, wenn die Producte von jeder Masse durch ihre Geschwindigkeit einander gleich sind.

Nun aber sieht man wohl ein, daß in der Mechanik dergleichen Gegenstände häufig in Erwägung zu ziehen seyn müssen, und daß folglich das Product der Masse eines Körpers durch seine Geschwindigkeit eine Art von Größe ist, deren Gebrauch in ihr häufig vorkommen muß. Dieß ist der Grund, warum man ihr einen besondern Nahmen, den Nahmen Größe der Bewegung gegeben hat.

39. Das, was wir eben Größe der Bewegung genannt haben, heißt auch Kraft des Stoßes. Diese letzte Benennung hat sie davon, weil wirklich von ihr die Intensität des Stoßes, oder die Erschütterung herrührt. Also bezieht sich der Ausdruck, Größe der Bewegung, eigentlich auf die Körper, sofern sie sich wirklich bewegen, und der, Kraft des Stoßes, auf die Körper, in dem Moment ihres Stoßens auf andre gedacht. Größe der Bewegung heißt sie in so fern, als sie in dem Körper sich befindet, oder als sie wirklich darinn, vor dem Stoße, existirt, und Kraft des Stoßes in so fern, als sie durch eben diesen Stoß vernichtet wird.

40. Die Größen der Bewegung werden eben so, wie die Geschwindigkeiten, durch Stücke von

geraden Linien vorgestellt, die man auf den Richtungen derselben, ihrem Werthe proportionirt, nimmt, und man schätzt sie nach dieser oder jener Richtung, mittelst ihrer Projection auf diesen geraden Linien. So ist eine Größe der Bewegung, nach jeder beliebigen Richtung geschätzt, gleich der Summe der Größen der Bewegung, in welche man sie zerlegen kann, alle nach der nämlichen Richtung geschätzt, wie die resultirende (27.).

41. Wenn ein Körper M, der sich mit einer durch $\overline{MW}$ (Fig. 4.) vorgestellten Geschwindigkeit zu bewegen strebt, plötzlich gezwungen ist, eine andere Geschwindigkeit, die durch $\overline{MV}$ vorgestellt ist, anzunehmen, und man beschreibt über der geraden Linie $\overline{MW}$ das Parallelogramm MVWU, so wird man die erste Geschwindigkeit $\overline{MW}$ in zwey andere $\overline{MV}$, $\overline{MU}$ auflösen können, deren eine $\overline{MV}$ die bleibende seyn wird. In diesem Falle heißt die andere Geschwindigkeit MU, die verlohrne Geschwindigkeit von dem Körper M.

Wenn man $\overline{UM}$ über den Punct M hinaus bis nach U' verlängert, und man M'U' = MU macht, so wird MWVU' offenbar ein neues Parallelogram seyn: woraus folgt, daß die Geschwindigkeit $\overline{MV}$, welche M behält, auch ihrerseits in zwey andere $\overline{MW}$, $\overline{MU^1}$ zerlegt werden kann, wovon die eine $\overline{MW}$ die erste Geschwindigkeit war, und die andere $\overline{MU^1}$ der verlohrenen Geschwindigkeit $\overline{MU}$ gleich und geradezu entgegen gesetzt ist; dieß ist der Grund, warum man diese letztere $\overline{MU^1}$ die gewonnene Geschwindigkeit von M nennt.

42. Wenn man ferner $\overline{WM}$ und $\overline{VM}$ über den Punct M hinaus, bis nach W^1 und V^1 verlängert, und $\overline{MW^1} = \overline{MW}$, $\overline{MV^1} = \overline{MV}$, macht; so werden offenbar MUV^1 und $MV^1W^1U^1$ zwey neue Parallelogrammen seyn; woraus sich ergiebt, daß die verlohrne Geschwindigkeit $\overline{MU}$ sich in zwey andere, $\overline{MW}$, $\overline{MV^1}$, und die gewonnene Geschwindigkeit $\overline{MU^1}$ sich ebenfalls in zwey andere, $\overline{MV}$, $\overline{MW^1}$ zerlegen läßt.

43. Aus allen diesen können wir folgende Schlüsse ziehen:

1) Die erste Geschwindigkeit läßt sich jederzeit in zwey andere auflösen, wovon die eine die übrigbleibende, und die andere die verlohrne Geschwindigkeit ist.

2) Die übrig bleibende Geschwindigkeit kann jederzeit in zwey andere zerlegt werden, deren eine

die erste, und die andere die gewonnene Geschwindigkeit ist.

3) Die verlohrne Geschwindigkeit ist die resultirende von der ersten, und einer, die der übrig gebliebenen Geschwindigkeit gleich und direct entgegengesetzt ist.

4) Die gewonnene Geschwindigkeit ist die resultirende von der übrigbleibenden, und einer andern, welche der ersten Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt ist.

Alles das, was wir von den Geschwindigkeiten $\overline{MW}$, $\overline{MV}$, $\overline{MU}$, $\overline{MW^{1}}$, $\overline{MV^{1}}$, $\overline{MU^{1}}$, und von ihrer Zerlegung gesagt haben, muß man (40.) auf gleiche Weise von den Größen der Bewegung $M.\overline{MW}$, $M.\overline{MV}$, $M.\overline{MU}$, $M.\overline{MW^{1}}$, $M.\overline{MV^{1}}$, $M.\overline{MU^{1}}$ verstehen. Nun haben wir aber (26.) diese verschiedenen Gleichungen:

$$\overline{MW} = \overline{MV}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MV} + \overline{MU}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MU}$$
$$\overline{MV} = \overline{MW}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MV} + \overline{MU^{1}}.\cos.\overline{MV}\wedge\overline{MU^{1}}$$
$$\overline{MU} = \overline{MW}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MU} + \overline{MV^{1}}.\cos.\overline{MV^{1}}\wedge\overline{MU}$$
$$\overline{MU^{1}} = \overline{MV}.\cos.\overline{MV}\wedge\overline{MU^{1}} + \overline{MW^{1}}.\cos.\overline{MW^{1}}\wedge\overline{MU^{1}}$$
$$\overline{MV} = \overline{MW}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MV} - \overline{MU}.\cos.\overline{MV}\wedge\overline{MU}$$
$$\overline{MU} = \overline{MW}.\cos.\overline{MW}\wedge\overline{MU} - \overline{MV}.\cos.\overline{MV}\wedge\overline{MU}$$

Und hiernach erhält man für die Größen der Bewegung ähnliche Gleichungen, indem man alles durch M multiplicirt.

Von den beschleunigenden oder verzögernden, und den bewegenden Kräften.

44. Eine beschleunigende oder verzögernde Kraft ist im Allgemeinen (17.) der Quotient einer Geschwindigkeit und einer Zeit.

Wenn die Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers in einem fortwächst, so heißt sie beschleunigt, und, wenn sie in einem fort vermindert wird, verzögerte, oder retandirte Bewegung.

45. Wenn bey der beschleunigten Bewegung der Körper immer, in gleichen Zeiten, um gleiche Grade an Geschwindigkeit zunimmt, so nennt man die Bewegung gleichförmig-beschleunigt; im Gegentheil nennt man sie gleichförmig-verzögert, wenn der bewegliche Körper, in gleichen Zeiten, immer gleiche Grade von Geschwindigkeit verliehrt.

Bey der gleichförmig-beschleunigten Bewegung nennt man die beschleunigende Kraft des beweglichen Körpers, die Geschwindigkeit, welche er in einem gegebenen Zeitraum gewinnt, durch diese Zeit dividirt. Weil er also, in gleichen Zeiten, immer gleiche Grade von Geschwindigkeit gewinnt, so ist folglich die beschleunigende Kraft, bey der gleichförmig-beschleunigten Bewegung, constant, das heißt, sie ist die nämliche für jeden Augenblick der Bewegung.

Bey der gleichförmig-verzögerten Bewegung ist die verzögernde Kraft constant.

46. Wenn die Bewegung sich nach irgend einem Gesetz beständig verändert, so nimmt man einen unendlich kleinen Zeitraum an, und nennt für jeden Augenblick beschleunigende oder verzögernde Kraft des beweglichen Körpers: das Verhältniß der unendlich kleinen Zu- oder Abnahme, welche bey der Geschwindigkeit während dieses Zeitraumes Statt findet, zu seiner Dauer, das heißt, der Quotient des Differentials der Geschwindigkeit durch die Differentiale der Zeit, oder genauer, das Element dieses Quotienten.

47. Man kann alles dieses sehr anschaulich machen, wenn man eine krumme Linie beschreibt, deren Abscissen die verlaufenen Zeiten, und deren Ordinaten die Geschwindigkeiten vorstellen. Denn dann ist es durch die vorhergehenden Definitionen einleuchtend, daß die Peripherie der krummen Linie die durchlaufenen Räume, und das Verhältniß der Ordinate zu der Subtangente, die beschleunigende

oder verzögernde Kraft, je nachdem die Absciſſen wachſen oder kleiner werden, vorſtellt.

48. Man nennt bewegende Kraft, Kraft des Druckes, oder todte Kraft eines Körpers, das Product ſeiner Maſſe durch ſeine beſchleunigende, oder verzögernde Kraft.

Eine klare und richtige Idee von dieſen Arten von Kräften werden wir bekommen durch die Betrachtung der Schwere, oder der Schwerkraft, das heißt, des Strebens aller Körper, welche ſich auf der Oberfläche der Erde befinden, gegen ihren Mittelpunct. Nichts iſt uns alltäglicher, als die Wirkungen dieſer Kraft. Man nimmt einen Stein in ſeine Hand, und erfährt das, was man einen Druck nennt; man hängt dieſen Körper an einen Faden auf, und hält das andere Ende dieſes Fadens; dieſer Faden zieht die Hand, oder übt einen Zug gegen ſie aus; der Faden ſelbſt iſt in einem Zuſtand der Spannung; ſo bald der Faden zerreißt, fällt der Stein mit einer Bewegung herunter, welche, wie die Erfahrung lehrt, gleichförmig beſchleunigt iſt. Die Geſchwindigkeit nun, welche er alſo, während einer gegebenen Zeit erhält, dividirt durch dieſe Zeit, iſt es, was man die Schwerkraft, oder die Schwere nennt. Dieſe Schwerkraft oder Schwere iſt die beſchleunigende Kraft; das Product eben dieſer Schwerkraft, durch die Maſſe des Körpers, iſt das, was man ſein Gewicht nennt; und das Gewicht iſt die bewegende Kraft, oder die Kraft des Druckes des Körpers. Diese beyden Ausdrücke sind gleich-bedeutend, aber der, bewegende Kraft, bezieht sich eigentlich mehr auf den Zustand der Bewegung des Körpers, und der, Kraft des Druckes, auf seinen Zustand der Ruhe, oder vielmehr des Gleichgewichts.

49. Hat man einmal eine genaue Vorstellung von der Schwere, so kann man leicht begreifen, was eine verdoppelte, drey- oder vierfach rc. genommene beschleunigende Kraft, oder was die Hälfte, das Drittel davon ist u. s. w. Die Schwerkraft selbst giebt uns ein Beyspiel davon; denn die Erfahrung beweist, daß, ob sie gleich auf den verschiedenen Puncten der Oberfläche der Erdkugel ziemlich dieselbe Intensität hat, sie doch abnimmt, wenn man sich um etwas merkliches von ihrem Mittelpuncte entfernt. Man hat gefunden, daß diese Kraft oder Tendenz die Sphäre ihrer Thätigkeit bis auf den Mond erstreckt, daß sie es ist, welche denselben in seiner Bahn erhält, aber daß ihre Intensität dort sehr geschwächt ist. Nachher hat man durch noch allgemeinere Anwendung dieser Entdeckung, und indem man sich immer dabey auf Erfahrungen stützte, gefunden, daß sich dieselbe Tendenz und Kraft bis auf die entferntesten Sterne erstrecke, und daß sie unter ihnen allen wechselseitig Statt fände. Dieses allgemeine Streben aller Körper des Weltalls gegen einander nennt man Anziehung; und die Untersuchung der Gesetze,

welche sie befolgt, und der Wirkungen, welche sie hervorbringt, machten den Hauptgegenstand der unsterblichen Arbeiten Newtons, und derjenigen aus, die seinen Fußstapfen gefolgt sind.

Alle diese Kräfte nun sind in Beziehung auf das, was wir Gewicht genannt haben, das, was im Allgemeinen bewegende Kräfte heißen; und jede bewegende Kraft ist das Product einer Masse durch eine beschleunigende oder verzögernde Kraft, die mit der Schwere oder der Schwerkraft verglichen werden kann, und da diese beschleunigende Kraft selbst (48.) nichts anders ist, als das Verhältniß der Zunahme der Geschwindigkeit, während einer unendlich kurzen Zeit, zu diesem Zeitelemente, so folgt daraus, daß eine jede bewegende Kraft, das Product einer Masse durch eine Geschwindigkeit, dividirt durch einen Zeitraum, ist, wie wir oben gesagt haben (17.).

50. Die Schwere, und alle Kräfte der Art, wirken in unbemerkbaren Graden, und bringen keine gewaltsame Veränderung hervor. Dem ungeachtet scheint es ziemlich natürlich zu seyn, sie sich vorzustellen, als ob sie in unendlich kleinen Zeiträumen ebenfalls unendlich kleine Stöße den beweglichen Körpern, welche sie in Bewegung setzen, mittheilte. Und von nun an wird das Product einer jeden bewegenden Kraft, multiplicirt durch das Element der Zeit, während dessen sie auf den, in Betrachtung gezognen Körper wirkt, als eine un-

endlich kleine Bewegungsgröße angesehen werden können, die auf einmal demselben Körper mitgetheilt wird; und die Erfahrung bestätigt die Richtigkeit dieser Hypothese.

Z. B. wenn $\underline{g}$ das Gewicht ausdrückt, M die Masse des Körpers, und $\underline{dt}$ das Zeitelement, so wird $M\underline{g\,dt}$ die unendlich kleine Bewegungsgröße ausdrücken, die man als dem M, im ersten Augenblicke der Zeit, welcher durch dt vorgestellt ist, mitgetheilt wird ansehen können, und die Rechnungen, die man nach dieser Voraussetzung anstellt, sind immer den Resultaten der Erfahrung gemäß.

51. Die beschleunigenden, verzögernden und bewegenden Kräfte werden eben so, wie die Geschwindigkeiten und die Größen der Bewegung durch Theile gerader Linien, die man auf ihren Richtungen, diesen Kräften proportionirt genommen hat, vorgestellt, und man unterwirft sie den nämlichen Zerlegungen. So läßt sich z. B. jede bewegende Kraft, oder Kraft des Drucks in zwey andere auflösen, die sowohl in Rücksicht ihrer Größen, als ihrer Richtungen durch die Seiten eines Parallelogramms ausgedrückt werden, dessen anliegende Diagonale diese bewegende Kraft ausdrücken würde.

Eine bewegende Kraft, nach irgend einer Seite, oder nach irgend einer Richtung hin geschäzt, ist, wie bey den Geschwindigkeiten (26.), das Product dieser bewegenden Kraft durch den Cosinus des Winkels, den jene Richtung mit der Richtung dieser bewegenden Kraft macht; das heißt, die reducirte Kraft ist das Product der gegebenen Kraft selbst durch den Cosinus des Projectionswinkels.

52. Wenn dieser Winkel spitz ist, so heißt diese Kraft, in Bezug auf die gegebene gerade Linie, sollicitirend; weil es in der That offenbar ist, daß sie in der Richtung dieser geraden Linie zu bewegen strebt; aber wenn der Winkel stumpf ist, so heißt die Kraft widerstrebend, weil sie wirklich in einer, der sollicitirenden Kraft, entgegengesetzten Richtung zu bewegen strebt. Es ist klar, daß ein Nullwinkel für spitz, und einer, der der halben Circumferenz gleich ist, für stumpf angesehen wird.

Wenn z. B. ein Mensch ein Gewicht mit Hülfe eines Hebels, einer Rolle, einer Schraube u. s. w. emporhebt, so ist es offenbar, daß die Schwere und die Geschwindigkeit des Gewichts, oder der Weg, den es beschreibt, nothwendig unter sich einen stumpfen Winkel bilden müssen; sonst würde augenscheinlich das Gewicht, anstatt empor zu steigen, heruntergehen: aber die bewegende Kraft und ihre Geschwindigkeit bilden einen spitzen Winkel; und so wird, nach unsrer Definition, das Gewicht die widerstrebende, und die Kraft des Menschen die sollicitirende Kraft seyn.

Von den bewegenden Kräften im engern Sinne und den lebendigen Kräften.

53. Man nennt bewegende Kräfte im engern Sinn (forces mouvantes), jene treibenden (motrices), oder mit den Gewichten vergleichbaren Kräfte in so fern, als man sie bey Maschinen braucht, um Widerstand zu überwinden, oder Bewegungen irgend einer Art hervorzubringen; und, da man oft Menschen, Thiere, fließendes Wasser, Wind, Stahlfedern, durch Feuer in Dämpfe verwandeltes Wasser etc. dazu braucht, so giebt man diesen Mitteln, oder vielmehr den Wirkungen, welche sie unmittelbar gegen die Körper, auf welche sie angewandt werden, äussern, den Namen bewegende Kraft. Das Wirkende selbst nennt man den Beweger, und den Druck, welchen er ausübt, oder die Bewegung, welche er eindrückt, heißt die bewegende Kraft.

54. Die Mechanik geht nicht bis auf die ersten Ursachen der Bewegung zurück, sie untersucht nicht, wie der Mensch, oder das Thier, durch seinen Willen, seine Glieder aus dem Zustand der Ruhe versetzt, und sie nach Willkühr wieder dahin zurück führt; sie sieht auf nichts, als auf die Thatsache, die daraus hervorgeht, betrachtet bloß

die schon vorhandene Bewegung, und ihr Gegenstand ist einzig und allein die Untersuchung, wie diese einmal mitgetheilte Bewegung sich erhält, sich fortpflanzt, oder sich modifirt, abstrahirt von allen neuen fremdartigen Einflüssen, das heißt, sie berechnet nie die innere Kraft oder das Vermögen des Bewegenden, sondern einzig die wirkliche Kraft, welche er verbreitet, und welche wir eben bewegende Kraft genannt haben.

55. Man nennt lebendige Kraft eines Körpers das Product seiner Masse durch das Quadrat seiner Geschwindigkeit; was aber zur Betrachtung dieser neuen Art von Größe hat Gelegenheit geben können, ist Folgendes:

Die Erfahrung beweist, wie eben bemerkt worden ist, daß die Menschen, die Thiere, und andere wirkende Körper dieser Art, Kräfte ausüben können, die sich mit denen der Gewichte vergleichen lassen, sey es nun in Rücksicht ihrer eigenen Gewichte selbst, oder in Rücksicht der freywilligen Anstrengungen, deren sie fähig sind. Nun aber bieten sich zwey Arten, die Wirksamkeit, die sie wirklich ausüben, zu schätzen, dar, wovon eine eben so natürlich ist, als die andere. Die eine besteht darinn, daß man darauf sieht, welche Last ein Mensch z. B. tragen kann, oder welche Gewalt, in Gewicht geschätzt, er tragen kann, wenn alles im Zustande der Ruhe bleibt. Dann ist die Stärke dieses Menschen eine Kraft des Drucks, die diesem oder jenem Gewichte gleich ist, und die man bisweilen todte Kraft nennt (47.).

56. Die zweyte Art, die Stärke eines Menschen, eines Pferdes u. s. w. zu schätzen, ist die, daß man die Arbeit in Betracht zieht, welche er in einer gegebenen Zeit, z. B. in einem Tage, durch anhaltende Thätigkeit zu vollführen im Stande ist. Um, wie im ersten Fall, auch bey diesem Gesichtspuncte zu einer genauen Schätzung zu gelangen, können wir wieder das Resultat seiner Arbeit mit der Wirkung des Gewichts vergleichen; denn es ist natürlich, diese Arbeit nach Gewichten, welche er in einer gegebenen Zeit emporheben kann, und nach der Höhe, zu welcher er es hinaufhebt, zu schätzen. Eben auf dieß achtet man auch, wenn man sagt, daß ein Pferd, in Rücksicht seiner Kraft, sieben Menschen gleich ist: man will nicht sagen, daß, wenn sieben Menschen auf einer Seite zögen, und das Pferd auf der andern, Gleichgewicht Statt finden würde; sondern, daß ein Pferd z. B. durch anhaltende Thätigkeit, für sich allein so viel Wasser aus der Tiefe eines Brunnens zu einer gegebenen Höhe emporziehen wird, als die sieben Menschen zusammen in der nämlichen Zeit. Wenn man Arbeiter braucht, so liegt es weit mehr daran, zu wissen, wie viel Arbeit von einer solchen Art, wie der, von der wir eben gesprochen haben, sie verrichten können, als die Lasten zu wissen, welche sie, ohne sich vom Platze zu rühren, tragen können. Diese neue Art, die Kräfte zu be-

trachten, ist folglich wenigstens eben so natürlich, und eben so wichtig als die erste. Und da offenbar ein Gewicht von 200 Pfund 3000 Pariser Fuß hoch zu heben, bey dieser Art die Kräfte zu schätzen, das nämliche ist, als 400 Pfund bloß 1500 Pariser Fuß hoch zu heben; so müssen dem zufolge aus diesem neuen Gesichtspuncte die Kräfte in geradem Verhältnisse der Gewichte, die zu heben sind, und der Höhen, zu welchen sie gehoben werden sollen, betrachtet werden; und eben so auch andere Arbeiten, die sich mit diesen vergleichen lassen. Hierauf ist der Begriff der lebendigen Kräfte gegründet.

57. M sey eine Masse, P ihr Gewicht, G die Schwerkraft, dt das Zeitelement, und H die Höhe, zu welcher P gehoben worden ist; nach dieser neuen Art, die Kräfte zu betrachten, wird diejenige, die angewendet werden mußte, um P zur Höhe H zu erheben, P H seyn; aber (17.) da H ein durchlaufener Raum ist, so kann er durch das Product einer Geschwindigkeit V, und einer Zeit T ausgedrückt werden; auf der andern Seite hat man (48.) $P = gM = gdt \cdot M$ [illegible] und gdt ist eine Geschwindigkeit V^1 [illegible] (17.). Folglich ist $PH = MVV^1 \frac{T}{dt}$; folglich, da dt und T zwey homogene Größen sind, so wird PH das Product einer Masse durch das Product zweyer Geschwindigkeiten, oder durch das Quadrat der

mittlern Proportional=Geschwindigkeit zwischen V und V[1] seyn; folglich löst sich die Kraft PH in ein Product einer Masse, durch das Quadrat einer Geschwindigkeit auf, wie Mu^2, indem u die mittlere Proportional=Geschwindigkeit zwischen V und V[1] ist. Dieß ist der natürliche Ursprung des Begriffs der lebendigen Kräfte. Man hat ehemals große Untersuchungen über die Aufgabe angestellt, zu wissen, ob die Kräfte der bewegten Körper nach dem Product der Masse durch die Geschwindigkeit, oder nach dem Product der Masse durch das Quadrat der Geschwindigkeit geschäzt werden müssen. Dieses läuft, wie man sieht, auf einen Wortstreit hinaus; denn wenn man anders, den einmal angenommenen Definitionen gemäß, schließt, so werden die Schlüsse immer dieselben seyn, weil man immer von denselben Gründen ausgeht.

58. Unter den bloßen Namen Kraft, oder Gewalt, oder eigentlich sogenannte Kräfte, versteht man die Größe der Bewegung und die treibenden Kräfte, oder, wenn man will, die Kräfte des Stoßes und des Druckes, weil sie den nämlichen Zerlegungen und den nämlichen Gesetzen unterworfen sind. Wenn man aber eine lebendige Kraft bezeichnen will, so fügt man jederzeit ihr charakteristisches Beywort hinzu, nämlich das Wort lebendig.

59. Wir haben eben gesehen, daß die lebendige Kraft entweder unter der Gestalt Mu^2, einer

Masse durch das Quadrat einer Geschwindigkeit, oder unter der Gestalt P.H, einer treibenden Kraft durch eine Linie vorgestellt werden kann. Im ersten Falle ist es die eigentlich sogenannte lebendige Kraft, im zweyten kann man ihr den besondern Beynahmen verborgene lebendige Kraft geben.

Von den Momenten im Allgemeinen, dem Momente der Wirksamkeit, und der Größe der Wirkung.

60. Man nennt im Allgemeinen Moment der Kraft, es sey nun des Druckes, oder des Stoßes, das Product dieser Kraft durch eine Linie (17.); so ist die Größe P.H, die wir gefunden haben (57.), das Moment einer treibenden Kraft P; und M u h, vorausgesetzt, daß M eine Maße, u eine Geschwindigkeit, und h eine Linie bedeutet, ist das Moment der Kraft oder der Größe der Bewegung M u.

Man sieht hieraus, daß das Moment einer treibenden Kraft jederzeit in eine lebendige Kraft aufgelöst werden kann, und daß das Moment einer Größe der Bewegung sich jederzeit in eine lebendige Kraft, multiplicirt durch eine Zeit, zerlegen läßt. Denn h, welches eine Linie ist, ist das Product einer Geschwindigkeit durch eine Zeit. Diese Art des Products heißt auch Größe der

Wirkung der gegebenen Masse. So ist Muh die Größe der Wirkung der Masse M.

61. Es giebt verschiedene Arten von Momenten, je nachdem die Linie, die zum Factor dient, beschaffen ist. So z. B. wird die Linie PH, welche das Product einer vertikalen treibenden Kraft P, durch eine Linie H, ebenfalls in vertikaler Richtung genommen, ist, das Moment der Wirksamkeit, das durch die Kraft P consumirt ist, heissen; und überhaupt werde ich ein durch eine treibende Kraft consumirtes Moment der Wirksamkeit, das Product dieser Kraft, durch den Weg nennen, welchen der Punct, wo sie angewandt wird, beschreibt, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt; das heißt, das Product dieser Kraft durch den Weg, welchen der Punct beschreibt, wo sie angewandt wird, und durch den Cosinus des Projectionswinkels, oder desjenigen Winkels, welcher zwischen der Richtung der nämlichen Kraft, und der Richtung der nämlichen Geschwindigkeit eingeschlossen ist.

Im Gegentheile werde ich ein durch die nämliche treibende Kraft absorbirtes Moment der Wirksamkeit, das Product dieser Kraft, durch die Geschwindigkeit des Punctes, wo sie angewandt wird, nach der entgegengesetzten Richtung dieser Kraft geschätzt, oder multiplicirt durch den Cosinus des Complementes des Projectionswinkels, nennen.

Weil nun zwey Winkel, die das Complement von einander sind, ein und ebendenselben Cosinus, nur mit entgegengesetzten Zeichen, haben, so folgt, daß das consumirte und das absorbirte Moment der Wirksamkeit bey einer und derselben treibenden Kraft ganz eine und ebendieselbe Größe sind, nach zwey im Diameter entgegengesetzten Richtungen genommen, gleich wie es die gewonnene und die verlohrne Kraft (41.) in Beziehung auf einander waren.

61. Wir haben oben bloß eine Kraft P, die beständig ist, betrachtet, wegen der Gleichförmigkeit des Gewichts; aber wenn die bewegende Kraft ungleichförmig wäre, so würde das Moment der in einer unendlich kurzen Zeit vollbrachten Wirksamkeit, das Product dieser Kraft in diesem Augenblick, durch den unendlich kleinen Raum, den es während dieser unendlich kleinen Zeit durchläuft, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, seyn, und das Moment der Wirksamkeit, in einer gegebenen Zeit durch die nämliche Kraft vollbracht, würde die Summe der Momente der durch diese Kraft, in jedem Augenblicke, während einer gegebenen Zeit vollbrachten Wirkung, seyn. Endlich, wenn von einer Reihe von Kräften die Rede wäre, so würde das Moment der Wirkung, vollbracht durch die ganze Reihe in einer gegebenen Zeit, die Summe der Momente der Wirkung, während dieser Zeit, durch jede der Kräfte dieser Reihe voll-

bracht, seyn. Eben so ist es bey den vernichteten Momenten der Wirkung.

63. Wenn man eine Reihe von Kräften, welche es auch seyn mögen, von Gewichten z. B. annimmt, und sie eine willkührliche Bewegung nehmen läßt, so wird die Summe der Producte jeder dieser Kräfte, durch den unendlich kleinen Weg, den sie in einer unendlich kleinen Zeit zurücklegen wird, vermöge dieser mitgetheilten Bewegung, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, das consumirte Wirkungs-Moment des ganzen Systems, während dieser unendlich kurzen Zeit, in Beziehung auf diese mitgetheilte Bewegung, seyn. Angenommen also, daß m irgend eine der Massen, welche ein System ausmachen, ausdrücke, p ihre beschleunigende Kraft, und folglich pm ihre bewegende Kraft; u die ihr mitgetheilte Geschwindigkeit, k den Winkel, der zwischen den Richtungen u und p begriffen ist, und endlich dt das Zeitelement, so wird $mp \cdot udt \cdot \cos. k$ das während dt durch den Körper m, oder durch die Kraft mp, in Rücksicht der Geschwindigkeit u consumirte Wirkungs-Moment seyn. Das Integral $Smp.\ udt.\ \cos.\ k$, wo man annimmt, daß S sich auf die Figur des Systems beziehe, wird das eben dieselbe Zeit hindurch von dem ganzen Systeme consumirte Wirkungs-Moment seyn; und endlich wird das Integral $S \int mp.\ udt.\ \cos.\ k$, wo man voraussetzt, daß $\int$ sich auf die Dauer der Bewegung bezieht, das während der

ganzen Dauer der Bewegung und von dem ganzen Systeme consumirte Wirkungs-Moment seyn.

64. Es ist nach dem, was oben (59.) gesagt worden ist, klar, daß S Imp. u dt. cos. k eine verborgene lebendige Kraft ist, die sich folglich in eine Größe von dieser Gestalt MV^2 auflösen läßt, wenn M eine Masse, und V eine Geschwindigkeit ist. Woraus man leicht abnehmen kann, daß der Begriff, den wir eben von den Momenten der Wirkung angegeben haben, häufig in der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung vorkommen muß, es sey nun unter der Gestalt von eigentlich sogenannten lebendigen Kräften, oder unter der, von verborgenen lebendigen Kräften.

Ich werde, in Beziehung auf die Größen der Wirkung, einen Unterschied, der demjenigen, den ich oben für die Momente der Wirksamkeit der bewegenden Kräfte, festgesetzt habe, analog ist, annehmen. Ich werde folglich die, durch eine bewegende Kraft, in jedem Augenblick verwendete Größe der Wirkung, durch diese Kraft, vom Anfange der Bewegung an, consumirte Wirkungs-Moment, multiplicirt durch das Zeitelement, die durch die nämliche Kraft aber acquirirte Größe der Bewegung das durch diese Kraft, vom Anfange der Bewegung an, absorbirte Wirkungs-Moment, multiplicirt durch das Zeitelement, nennen. Die Summe der, von allen Kräften des Systems in einem bestimmten Augenblicke zusammen verwendeten oder acquirirten Wirkungsgrößen wird die in dem nämlichen Augenblick von dem ganzen Systeme verwendete oder acquirirte Wirkungsgröße heißen.

Und endlich wird die Summe der in jedem Augenblick von dem ganzen Systeme, während einer gegebenen Zeit verwendeten oder acquirirten Wirkungsgrößen die von dem ganzen Systeme während dieser gegebenen Zeit verwendete oder acquirirte Wirkungsgröße genannt werden.

65. Wir haben oben bemerkt, daß das Moment einer bewegenden oder todten Kraft, sich in eine lebendige Kraft auflöst, während das Moment einer Größe der Bewegung, das ist, was man Größe der Wirkung nennt. Aber, wenn man, anstatt die Größe der Bewegung durch eine Linie zu multipliciren, um diese Größe der Wirkung zu bekommen, sie bloß durch eine Geschwindigkeit multiplicirte, so würde man eine lebendige Kraft haben, das heißt, eine Größe von derselben Gattung, wie ein Moment der bewegenden Kraft ist. Weil aber diese zwey Größen von der nämlichen Art oft mit einander zu vergleichen sind, so will ich diesem Product der Größe der Bewegung eines beweglichen Körpers durch eine Geschwindigkeit, einen besondern Namen geben; ich will sie bloß Moment der Wirksamkeit des beweglichen Körpers nennen, um sie von dem zu unterscheiden, was wir oben das Moment der durch die bewegende Kraft consumirten oder ab-

forbirten Wirksamkeit genannt haben; aber diese beyden Größen sind von ein und ebenderselben Beschaffenheit, und eine wie die andere läßt sich auf lebendige Kräfte reduciren. Ich nenne daher Moment der Wirksamkeit des beweglichen Körpers in jedem Augenblick das Product der Größe seiner gegenwärtigen Bewegung durch die Geschwindigkeit, welche er den Augenblick nachher haben muß, nach der Richtung seiner gegenwärtigen Geschwindigkeit geschätzt.

66. Wenn also die Bewegung gleichförmig ist, so ist das Moment der Wirksamkeit des beweglichen Körpers von der lebendigen Kraft nicht verschieden.

Wenn die Bewegung sich verändert, es sey nun vermöge eines Stoßes, oder in unmerklichen Graden, so ist das Moment der Wirksamkeit eines beweglichen Körpers gleich der Größe der wirklichen Bewegung, multiplicirt durch die Geschwindigkeit, welche dem beweglichen Körper, den Augenblick darnach, bleiben muß, geschätzt nach der Richtung der ersten, und dieß werde ich das absolute Wirkungs-Moment des beweglichen Körpers nennen.

Gesetzt, das System befände sich in irgend einem Zustande der Bewegung, und man veränderte denselben auf irgend eine Art, so wird das Wirkungs-Moment eines beweglichen Körpers das Product der Größe der wirklichen Bewegung durch die neue Geschwindigkeit seyn, welche der bewegliche Körper, vermöge der bewirkten Veränderung annehmen wird; und dieß will ich dann Moment der Wirksamkeit des beweglichen Körpers, in Rücksicht seiner neuen Bewegung, nennen.

67. Moment der Wirksamkeit eines Systems von Körpern in jedem Augenblick, wird die Summe der Momente der Wirksamkeit eines jeden dieser Körper, die zusammen das System ausmachen, heißen.

Also, wenn man plötzlich die Bewegung irgend eines Systems verändert, so ist das Moment der Wirksamkeit des Systems, in Rücksicht seiner neuen Bewegung, die Summe der Producte jeder der Massen, durch seine gegenwärtige und durch seine neue Geschwindigkeit, letztere nach der Richtung der ersten geschätzt.

Dieser Begriff der consumirten, absorbirten und eigentlich sogenannten Momente der Wirksamkeit ist für das, was wir im zweyten Theile dieses Werkes zu sagen haben werden, von äusserster Wichtigkeit.

Wir werden Moment des Stoßes bey jedem Körper des Systems, in Rücksicht irgend einer geometrischen Bewegung, die Größe der Bewegung nennen, welche dieser Körper, vermöge des

Stoßes, verlohren hat, multiplicirt durch die geometrische Geschwindigkeit desselben Körpers.

Das absolute Moment des Stoßes werden wir dasjenige von diesen Momenten nennen, welches in Rücksicht der wirklichen Bewegung, welche das System nach dem Stoß annimmt, statt findet.

Es ist offenbar, daß diese Momente des Stoßes, eben so, wie die Momente der Wirksamkeit, gleiche Beschaffenheit mit dem, was man lebendige Kraft nennt, haben, das heißt, daß man jedes von ihnen, jederzeit auf das Product einer Masse, durch das Quadrat einer Geschwindigkeit zurückführen kann.

68. Jedermann kennt die Anwendung des Hebels, jedermann weiß, mit welcher sehr kleinen Kraft, an dem einen Arme des Hebels angewandt, man ein sehr beträchtliches, am andern Arme aufgehängtes, Gewicht halten kann, wenn dieser Arm, verhältnißmäßig, viel kleiner ist. Dieß hat die Idee einer andern Art von Moment, von der man in der Mechanik sehr häufig Gebrauch macht, veranlaßt. Man nennt dem zufolge Moment einer Kraft, in Beziehung eines festen Punctes, das Product dieser Kraft, durch den Abstand ihrer Richtung gegen diesen festen Punct. So z. B. wenn man an die äußersten Enden eines geradlinigten Hebels ungleiche Gewichte anhängt, und

den Unterstützungspunct zwischen diesen beyden Gewichten so stellt, daß der Punct, wo man ihn anbringt, die Länge des Hebels, im umgekehrten Verhältniß dieser Gewichte, theilt, so werden die Momente dieser Gewichte, in Beziehung auf diesen festen Punct, gleich seyn. Oder die Erfahrung lehrt, daß dann Gleichgewicht zwischen den beyden Gewichten seyn wird.

Wenn man die Momente mehrerer Kräfte, in Beziehung auf einen und denselben Punct betrachtet, so heißt dieser Punct das Centrum dieser Momente.

69. Man bezieht auch die Momente der Kräfte auf gerade Linien, die man willkührlich im Raume genommen hat, und die man Axen der Momente nennt. Das Moment einer Kraft, in Rücksicht auf eine Axe, ist das Product dieser Kraft, geschätzt nach der Ebene, die auf dieser Axe senkrecht steht, das heißt, der Verzeichnung dieser Kraft auf derselben Ebene; dieser Verzeichnung sage ich, multiplicirt, durch den Abstand ihrer Richtung, von dem Puncte, wo die Axe die Ebene durchschneidet.

70. Endlich, wenn eine Kraft an einem Puncte, oder an irgend einem beweglichen Körper angebracht worden ist, so heißt das Product dieser Kraft durch den Abstand dieses Punctes, wo sie angebracht worden ist, in der nämlichen Ebene,

das Moment dieser Kraft in Beziehung auf diese Ebene.

71. Was das anbetrifft, was wir oben mit dem Nahmen, Größe der Wirkung bezeichnet haben, so giebt es Gelegenheit zu einem sehr schönen Prinzip, das vorzüglich auf den Fall anwendbar ist, wo die bewegenden Kräfte, die die verschiedenen Theile des Systems in Bewegung setzen, Kräfte der Attraction oder Repulsion sind. Dieses Prinzip, welches Lagrange eigenthümlich angehört, wird im zweyten Theile des Werkes vorkommen.

Von den Hypothesen, die als allgemeine Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung angenommen werden können.

72. Dabey, daß wir uns, wie es bisher geschehen ist, auf einige Erfahrungen, oder allgemein bekannte Thatsachen beruften, haben wir keine andere Absicht gehabt, als darzuthun, was diese verschiedenen Begriffe, die wir zu entwickeln haben, hat veranlassen können. Jetzt kommt es darauf an, auf diese Thatsachen und auf andere Beobachtungen, die sich noch darbieten können, Hypothesen zu gründen, die beständig mit diesen Beobachtungen übereinstimmen, und die dann als allgemeine Gesetze der Natur angesehen werden können. Ich will hier den Anfang mit der Auseinandersetzung dieser Hypothesen selbst machen, die

man geglaubt hat, aus den am sichersten anerkannten Phänomenen durch Induction folgern zu können; alsdann will ich die Erfahrungen und die Schlüsse, die ihnen zur Stütze dienen, genauer entwickeln. Man wird bemerken können, daß diese Hypothesen zum Theil in einander greifen: es war aber nicht mein Zweck, sie auf die möglichst kleinste Zahl zurück zu führen; sondern es gnügte mir, daß sie nicht in sich selbst widersprechend wären, und daß sie deutlich verstanden würden; denn wie ich schon bemerkt habe, Wiederholungen können zwar der Eleganz nachtheilig seyn; allein sie sind vielleicht dennoch mehr dazu geschickt, die Prinzipien zu bestätigen, indem sie selbst offenbar zeigen, wie sie, so zu sagen, nichts anders, als die nämlichen Wahrheiten sind, die nur immer wieder unter andern Gestalten erscheinen.

73. Zuerst wiederhole ich, daß hier nicht die Rede von den Grundursachen ist, die die Bewegung in den Körpern erzeugen, sondern bloß von den schon erzeugten, und jedem von ihnen anhängenden Bewegung. Und diese Größe, der schon in einem Körper hervorgebrachten Bewegung nennt man seine Kraft, oder seine Gewalt. Also sind die Kräfte, wie man sie in der Mechanik betrachtet, keine metaphysischen und abstracten Dinge; jede von ihnen ist einer bestimmten Masse inwohnend; sie ist das Product dieser Masse durch die Geschwindigkeit, welche der Körper annehmen würde, wenn er nicht durch die Massen anderer Kör-

per, deren Bewegung sich nicht mit der seinigen verträgt, gehindert wäre. Durch diese Unverträglichkeit wird bey den einem ein Theil der Größe der Bewegung, die sie bereitet hatten, zerstört, in andern wird dieselbe vermehrt, und bey noch andern Bewegung erzeugt, die gar keine hatten; jeder von ihnen nimmt eine Art von Geschwindigkeit an, die aus der, welche er schon haben konnte, und denjenigen, die ihm von andern Seiten her aufs neue mitgetheilt worden sind, zusammengesetzt ist.

Diese combinirte Geschwindigkeit ist es nun, welche man für jeden Augenblick, und für jeden Punct des Systems bestimmen muß, wenn die Figur der verschiedenen Theile, die es ausmachen, ihre Massen und die Geschwindigkeiten bekannt sind, von denen man annimmt, daß sie sie vorläufig bekommen haben, es sey nun durch vorhergegangene Stöße, oder durch äußere Wirkungen, von welcher Beschaffenheit sie auch seyn mögen. Also sind dieß, mit einem Worte, nicht eigentlich die Gesetze der Bewegung im Allgemeinen, welche wir untersuchen, sondern die Gesetze der Mittheilung der Bewegung, unter den verschiedenen materiellen Theilen eines und ebendesselben Systems. Zu diesem Zweck stellen wir zuerst gewisse Hypothesen auf, nach welchen, der Voraussetzung gemäß, sich wirklich diese Mittheilung der Bewegung zutragen soll; wir vergleichen dann die Folgesätze, die daraus hervorgehen, mit den Phänomen, und stimmen sie mit diesen überein, so schließen wir, daß wir diese Hypothesen als die wahren Gesetze der Natur ansehen können.

Erste Hypothese. Ein Körper, der sich einmal in Ruhe befindet, wird nicht von selbst aus derselben treten können, und einer, der sich einmal bewegt, wird weder seine Geschwindigkeit, noch die Richtung dieser Geschwindigkeit verändern können.

Zweyte Hypothese. Wenn man verschiedenen Theilen irgend eines Systems von Körpern, das sich im Gleichgewicht befindet, neue Kräfte mittheilt, die, wenn sie allein wären, sich gegenseitig ins Gleichgewicht setzen würden; so würde das Gleichgewicht des Systems nicht gestört werden.

Dritte Hypothese. Wenn mehrere Kräfte, so wohl wirkende, als leidende, sich gegenseitig im Gleichgewicht befinden, so ist jede dieser Kräfte jederzeit der resultirenden aller übrigen gleich und direkt entgegengesetzt.

Vierte Hypothese. Die Größen der Bewegung, oder die bewegenden Kräfte, die sich in jedem Augenblick in einem System von Körpern einander vernichten, können jederzeit in andere Kräfte aufgelöst werden, deren immer zwey und zwey einander gleich und direct entgegengesetzt sind, und zwar in der geraden Linie, die die beweglichen Körper, zu denen sie gehören, verbindet; und diese Kräfte können in jedem dieser Körper, gegenseitig die eine durch die Wirkung des andern, als vernichtet angesehen werden.

Fünfte Hypothese. Die Wirkung, welche zwey sich berührende Körper auf einander durch Stoß, Druck oder Zug ausüben, hängt nicht von ihrer absoluten, sondern einzig und allein von ihrer relativen Geschwindigkeit ab.

Die Wirkung, welche sich zwey Körper bloß durch darzwischen liegende Körper mittheilen, wird von einem zum andern, durch Hülfe dieser Mittelkörper übergetragen, so daß sie sich jederzeit in eine Reihe von Wirkungen auflößt, die unmittelbar zwischen zwey an einander anliegenden Körpern ausgeübt werden.

Sechste Hypothese. Die Bewegungsgrössen, oder die todten Kräfte, welche sich die Körper wechselseitig durch Fäden oder Stäbe mittheilen, gehen nach der Richtung dieser Fäden oder Stäbe, und diejenigen, welche sich durch Stoß oder Druck mittheilen, gehen nach der Richtung der Perpendikulär-Linie, die auf ihrer gemeinschaftlichen Oberfläche im Berührungspunct errichtet wird.

Siebende Hypothese. Wenn die Körper,

die sich stoßen, vollkommen hart oder auch vollkommen weich sind, so gehen sie jederzeit nach dem Stoße, gemeinschaftlich fort, das heißt, in der Linie ihrer wechselseitigen Einwirkung, die, nach der vorhergehenden Hypothese, jederzeit auf ihrer gemeinschaftlichen Oberfläche im Berührungspuncte senkrecht steht.

Wenn die Körper vollkommen elastisch sind, so trennen sie sich nach dem Stoße mit einer relativen Geschwindigkeit, die der, welche sie unmittelbar vor dem Stoß in der entgegengesetzten Richtung hatten, gleich ist.

Wenn die Körper weder vollkommen hart, noch vollkommen elastisch sind, so trennen sie sich mit einer relativen Geschwindigkeit, die bald grösser, bald kleiner ist, nach dem Grade von Elasticität, den sie besitzen.

Erfahrungen und Schlüsse, auf welche die vorhergehenden Hypothesen gegründet sind.

74. **Ueber die erste Hypothese.** Die Erfahrung beweist, daß, wenn man auf eine horizontale vollkommen ebene Tafel eine Kugel stellt, ohne ihr irgend eine Bewegung mitzutheilen, diese Kugel so lange in Ruhe bleiben wird, bis man sie daraus treibt; und in der That, wenn man die

Sache nur in Beziehung auf bloßes Raisonnement betrachtet, so sieht man nicht ein, warum dieser Körper von sich selbst sich nach der einen, und nicht eben so gut nach der andern Seite bewegen sollte. Wir sehen zwar allerdings auch Wesen, die sich von selbst bewegen, aber dieß geschieht entweder, weil sie ein Prinzip des Lebens in sich haben, von dem man hier abstrahirt, oder sie werden durch äußere Ursachen, welche die Erfahrung kennen lehrt, z. B. die Schwere, fortgerissen. Ferner läßt sich aus der Analogie vermuthen, daß die Figur des Körpers nichts zu der erwähnten Eigenschaft beytragen kann, und daß das, was bey einer Kugel, die auf eine horizontale Tafel gestellt worden ist, Statt findet, von allem möglichen Körpern, in allen möglichen Stellungen gelten muß, vorausgesetzt, daß sie von allen fremdartigen Einfluß entfernt sind. Die erste, oben dargestellte Hypothese scheint folglich, was den ersten Punct anbetrifft, sowohl mit dem Raisonnement, als mit der Erfahrung übereinzustimmen.

75. Nun lehrt die Erfahrung, daß, wenn man nun die Kugel, von der die Rede ist, auf der Tafel in Bewegung setzt, sie sich hierauf in einem fort gleichförmig und in einer geraden Linie bewegen wird, wenn man sie nicht etwa durch einen neuen Stoß störet.

Diese Thatsache läßt sich aus den nämlichen Beobachtungen, wie die vorhergehende, erklären, aber mit etwas weniger Evidenz. Wenn ein Körper, der einmal in Bewegung gesetzt worden ist, von seiner ersten Richtung sich ablenken sollte, so sieht man nicht ein, warum er dieß rechts, und nicht eben so gut links hin thun sollte. Und was die Geschwindigkeit anbetrifft, so sieht man eben so wenig ein, warum sie sich eher vermindern, als vermehren sollte. Freylich weiß man, daß jede Bewegung nach und nach schwächer wird, und jederzeit endlich ganz aufhört. Aber man bemerkt bald, daß dieser Verlust an Geschwindigkeit von den Reibungen und dem Widerstande der Luft herkommt. Dieß bestätigt sich, wenn man an einem recht spitzigen Zapfen einen horizontalen Balancier hängt, der an seinen beyden Enden zwey gleiche, linsenförmig geschnittene Körper trägt, um die Luft besser zu durchschneiden; denn dann erhält sich die einmal mitgetheilte Cirkelbewegung sehr lange, und man wird völlig davon überzeugt, wenn man darüber nachdenkt, daß die Gestirne, welche so unendliche Räume, mit so raschen Bewegungen, durchlaufen, nach so vielen Jahrhunderten, daß man sie beobachtet, nichts Merkliches davon verlohren haben. Wir sind daher berechtigt, auch diesen zweyten Theil der oben vorgestellten Hypothese, als völlig auf Erfahrung und Raisonnement gegründet, anzusehen.

Diese Hypothese ist der unter dem Namen des Gesetzes der Trägheit bekannte Grundsatz, und man drückt ihn gewöhnlich so aus, daß man sagt: jeder Körper verharre so lange in seinem Zustande der Ruhe, oder der gleichförmigen und geradlinigten Bewegung, bis er die Einwirkung einer fremden Gewalt erfährt.

76. Ueber die zweyte Hypothese. Die zweyte Hypothese trägt den Charakter der fast ganz vollkommnen Evidenz an sich; denn wenn sich einerseits mehrere Körper gegenseitig ins Gleichgewicht setzen, so werden ihre Bewegungen durch ihre gegenseitige Wirkung auf einander aufgehoben; folglich müssen sich zwey oder mehrere Wirkungen von dieser Art, die zu gleicher Zeit ausgeübt werden, theilweise einander aufheben, so gut als wenn sie einzeln Statt gefunden hätten; daher muß das Resultat derselben Gleichgewicht seyn. Dieses Raisonnement scheint wenigstens der Einfachheit, welche man bey allen Verrichtungen der Natur wahrnimmt, völlig gemäß zu seyn; und es wird wirklich durch die Erfahrung bestätigt.

77. Hieraus kann man z. B. schließen, daß, wenn mehrere Kräfte sich im Gleichgewicht befinden, und eine von ihnen wie B (Figur 5.) den Punct A, durch eine Schnur $\overline{AB}$ zieht, man diese Kraft B in jedem andern Punct ihrer Richtung, wie C wird anwenden können, ohne das Gleichgewicht zu verändern. Denn wenn man an der Schnur zwey gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte C, D, anbringt, so wird das Gleichgewicht nach der

zweyten Hypothese fortdauern; wenn man hierauf die beyden gleichen und entgegengesetzten Kräfte B, D, wegläßt, so wird das Gleichgewicht, nach derselben Hypothese, auch noch bestehen. Folglich wird das Gleichgewicht nicht gestöret werden, wenn man an die Stelle der Kraft B die Kraft C setzt.

78. **Ueber die dritte Hypothese.** Die Erfahrung beweist, daß, wenn eine in Ruhe befindliche Kugel A auf einmal von andern Kugeln B, C, D, E, F gestoßen wird (Fig. 6.), und daraus Gleichgewicht entsteht, die resultirende Bewegungsgröße von allen diesen stoßenden Körpern Null seyn wird, und folglich ist jede dieser Größen der Bewegung der resultirenden aller übrigen gleich und direct entgegengesetzt. Die Erfahrung beweist eben so, daß, wenn mehrere bewegende Kräfte m, n, p, q (Fig. 7.) sich wechselseitig um den Punct A herum im Gleichgewicht halten, indem sie an ihm durch Seile ziehen, so wird die resultirende von allen diesen Kräften Null seyn, und folglich ist jede derselben der resultirenden aller übrigen gleich und direct entgegengesetzt.

79. Diese Erfahrungen lassen sich durch ein ganz plausibles Raisonnement erklären, und indem wir sie durch Induction allgemeiner machen, so begründen wir die dritte unserer Hypothesen.

In der That also, wir nannten im Allgemeinen, eine resultirende Kraft mehrerer anderer, an einem und ebendemselben Puncte angebrachter Kräfte diejenige, welche nach irgend einer Richtung hin geschätzt, der Summe aller andern, nach der nämlichen Richtung geschätzt, gleich ist.

Wir wollen nun annehmen, daß mehrere Kräfte, die an dem Puncte K (Fig. 8.) angebracht worden sind, sich einander im Gleichgewicht halten, und daß $\overline{Ka}$ eine von diesen Kräften sey. Wir wollen durch den Punct K irgend eine gerade Linie $\overline{KM}$ ziehen, und annehmen, daß man anstatt der Kraft $\overline{Ka}$ zwey andere unterlegt, eine $\overline{Ka^{I}}$ nach der Richtung $\overline{KM}$, die andere $\overline{Ka^{II}}$ perpendikulär auf dieser erstern. Wenn man sich eine ähnliche Operation mit allen Kräften vorgenommen denkt, die sich um den Punct K herum im Gleichgewicht halten, so wird das Gleichgewicht fortdauern, und es wird in dem ganzen Systeme bloß zwey Arten von Kräften geben, wovon die Richtung der einen immer nach der geraden Linie $\overline{KM}$ geht, die Richtung der andern aber auf derselben geraden Linie senkrecht steht. Aber da diese letztern diejenigen, welche nach der Richtung $\overline{KM}$ ziehen, nicht mehr begünstigen, als die, welche es nach der entgegengesetzten Richtung thun, so wird man sie, unbeschadet des Gleichgewichts, weglassen können. Es werden also bloß die nach der Linie $\overline{KM}$ gerichteten Kräfte übrig bleiben, um sich ins Gleichgewicht zu setzen. Da dieß nun nicht Statt finden kann, ohne daß die Summe derer, die nach der einen Richtung hinziehen, der Summe derer, die nach der entgegengesetzten Richtung ziehen, gleich ist, so ist noch zu wissen übrig, was jede dieser Kräfte bedeute.

Da nun, weil $\overline{Ka^{II}}$ geschätzt nach der Richtung $\overline{KM}$, $= 0$ ist, so ist offenbar, daß sie ganz und gar keinen Einfluß auf die Kraft $\overline{Ka}$, nach der nämlichen Richtung geschätzt, haben kann. Folglich wird diese Kraft $\overline{Ka}$ nach der Richtung $\overline{KM}$ geschätzt, weder größer noch kleiner seyn, ob die bloße einzelne Kraft $\overline{Ka^{I}}$, nach derselben Richtung geschätzt, das heißt, die Puncte a, a^{I} müssen sich auf derselben geraden Linie befinden, welche auf $\overline{KM}$ senkrecht steht; oder, welches auf dasselbe hinauskommt, $\overline{Ka^{I}}$ muß die Verzeichnung von $\overline{Ka}$, oder diese Kraft $\overline{Ka}$ selbst, nach der Richtung $\overline{KM}$ geschätzt, seyn. Und weil der nämliche Schluß für alle andern Kräfte des Systems Statt findet, so folgt daraus, daß die, nach der geraden Linie $\overline{KM}$ hingerichteten Kräfte nichts anders, als diese gegebenen Kräfte selbst, nach der Richtung von $\overline{KM}$ geschätzt, sind. Folglich weil Gleichgewicht daraus Statt finden muß, so muß sich die Summe aller dieser auf $\overline{KM}$ hingerichteter Kräfte auf o reduciren, das heißt, die Summe aller gegebenen Kräfte, nach der Richtung $\overline{KM}$ geschätzt, reducirt sich auf o, und folglich ist jede von ihnen der Summe aller andern gleich und direct entgegengesetzt.

80. Das Raisonnement bestätigt also die Erfahrung auf eine sehr augenscheinliche Weise, wenn alle gegebenen Kräfte sich in einem und demselben Puncte vereinigen. Nun sey Fig. 9. eine Maschiene, die mit Seilen gezogen wird, von mehrern Knoten A, B, C. Das, was wir in der vorhergehenden Figur von dem Puncte K gesagt haben, wird auf jeden der Knoten A, B, C insbesondere anwendbar seyn. Also wird die resultirende Kraft aus den Kräften $\overline{Am}$, $\overline{An}$, $\overline{Ao}$, gleich seyn dem Zuge des Selles $\overline{AB}$, nach $\overline{BA}$ hin gerichtet, und auf gleiche Weise wird die resultirende Kraft den Kräften $\overline{Cs}$, $\overline{Ct}$ gleich seyn der Spannung von $\overline{CB}$, nach $\overline{BC}$ hin gerichtet. Folglich wird die aus allen Kräften des Systems zusammen genommene resultirende Kraft durch den Punct B gehen, und dieser Fall wird mithin auf den vorhergehenden zurückgeführt seyn, solchergestalt, daß jede von den Kräften $\overline{Bp}$, $\overline{Bq}$, $\overline{Br}$ nach dem, was oben gesagt worden, der aus allen übrigen resultirenden gleich und gerade entgegengesetzt seyn wird. Da nun, wie leicht zu bemerken ist, das,

E

was wir eben von der Maschiene mit Seilen als einer gegebenen gesagt haben, sich auf alle mögliche Systeme von Kräften anwenden läßt, so ist es einleuchtend, daß unsere dritte Hypothese als ein allgemeines Naturgesetz angenommen werden kann.

81. Daraus folgt augenscheinlich, daß, wenn es bloß drey Kräfte bey einem im Gleichgewicht befindlichen System gäbe, jede derselben durch eine gerade Linie sich wird darstellen lassen, welche der Diagonale des Parallelogramms, das über den geraden Linien, welche die beyden andern Kräfte vorstellen, errichtet wird, gleich und gerade zu entgegengesetzt ist; ein wichtiger Grundsatz, welcher unter dem Namen des Parallelogramms der Kräfte bekannt ist.

82. Ueber die vierte Hypothese. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn man einen Körper aus dem Zustande seiner Ruhe herausreißen, oder ihn, wenn er in Bewegung ist, aufhalten, oder auch ihn bloß von seinem Wege ablenken, oder mit einem Wort, seine Geschwindigkeit auf irgend eine Weise verändern will, man immer einen Widerstand erfährt, der um so größer ist, je beträchtlicher die Veränderung ist, die man hervorbringen will. Wenn man einen Körper mit der Hand stößt, so erfährt man seinerseits auch einen ähnlichen Stoß, in der entgegengesetzten Richtung. Wenn man ihn an einem Faden zieht, so wird

der Faden von beyden Seiten gleichförmig gespannt. Wenn man einen Billiardball auf einer Tafel fortstößt, so wird das Queue, das man darzu braucht, durch einen Stoß nach hinten zu getrieben, während daß in der nämlichen Zeit der Körper vorwärts geht. Wenn man auf die Tafel einen andern Körper setzt, der den erstern anzieht, wie z. B. der Magnet das Eisen, so wird der erste Körper den zweyten eben so sehr anziehen, und jeder wird ein Stück des Weges zurücklegen, um sich dem andern zu nähern.

Wenn der Körper vollkommen hart ist, und er und ein anderer Körper, der eben so hart, und ihm an Masse und Geschwindigkeit gleich ist, sich in gerade entgegengesetzter Richtung einander begegnen, so werden beyde Bewegungen aufgehoben werden.

Wenn man zugleich die Masse des einen und die Geschwindigkeit des andern verdoppelt, so wird ebenfalls Gleichgewicht da seyn. Dasselbe wird Statt finden, wenn man die Masse des einen und die Geschwindigkeit des andern dreyfach nimmt, und überhaupt, wenn man diese Masse und diese Geschwindigkeit in dem nämlichen Verhältnisse vermehrt oder vermindert.

Die Erklärung aller dieser Thatsachen ist sehr natürlich; denn da die Gesetze der Natur für alle Theile der Materie, die in gleiche Umstände versetzt worden sind, die nämlichen seyn müssen, so sieht man nicht ein, warum z. B. beym Stoße gleicher, und mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten getriebener Körper, von denen wir eben gesprochen haben, bey dem einen geschehen sollte, was bey dem andern nicht geschähe, oder warum der erste über den andern ein Uebergewicht haben sollte.

83. Es ist in der That nicht ganz so deutlich, daß das Gleichgewicht Statt finden müsse, wenn man die Masse des einen, und die Geschwindigkeit des andern nach dem nämlichen Verhältniß vermehrt oder verringert.

Nichts desto weniger begreift man, daß, wenn ein Körper, der an Masse das Doppelte eines andern ist, diesen stößt, er auf ihn so wirken muß, wie zwey Körper, deren jeder diesem letztern gleich ist; und daß, wenn dieser seinerseits das Doppelte der Geschwindigkeit des erstern hätte, er auch auf diesen wirken muß, wie zwey Körper zusammen, deren jeder bloß die Hälfte der Geschwindigkeit des Ganzen haben würde, und daß es dann keinen Grund gäbe, warum der eine mächtiger, als der andere seyn sollte. Das Gleichgewicht muß folglich in diesem, wie in dem vorhergehenden Fall Statt finden; welches, da es durch mancherley Erfahrungen bestätigt ist, keinen Zweifel zuläßt.

84. Es scheint folglich gewiß zu seyn, daß überhaupt allemal, wenn ein Körper einem andern Bewegung mittheilt, er seinerseits eine gleiche Größe davon nach der entgegengesetzten Richtung empfängt, wenigstens in so weit, als der Stoß in gerader Richtung und bloß zwischen zwey Körpern vor sich geht. Aber die Analogie führt uns auf den Gedanken, daß das nämliche Statt finden muß, es mögen der Körper so viel, und die Richtungen ihrer Bewegungen seyn, welche sie wollen; und alle Phänomene der Natur bestätigen dieses wichtige Gesetz, welches man gewöhnlich mit den Worten ausdrückt: die Gegenwirkung ist jederzeit der Wirkung gleich und entgegengesetzt.

Dieses Gesetz, wie Maclaurin sehr gut bemerkt hat, ist gewissermaßen nichts anders, als ein allgemeiner Ausdruck des Gesetzes der Trägheit, das von der ersten, oben angegebenen Hypothese an beybehalten worden ist; das heißt, nach dem Ausdrucke dieses berühmten Mathematikers: „es kann nicht allein ein isolirter Körper seinen Zustand niemals von selbst verändern, sondern auch, wenn mehrere Körper da sind, die auf einander einwirken, so bekommt der eine keine neue Kraft, die nicht ein anderer, nach der nämlichen Richtung verlöre; woraus folgt, daß, ob gleich die Bewegung durch den Stoß, aus einem in den andern übergeht, gleichwohl die Summe der Größen ihrer Bewegung, nach einer gegebenen

Richtung geschätzt, jederzeit dieselbe ist, und daß sie durch die Wirkungen dieser Körper auf einander nicht verändert werden kann. Also dient dieses Gesetz der Gleichheit, zwischen der Wirkung und Gegenwirkung dazu, das Gesetz der Trägheit allgemeiner darzustellen, und es auf jede Anzahl von Körpern auszudehnen. Denn so wie nach dem letzteren ein Körper so lange in dem Zustande der Ruhe, oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Linie verharrt, bis er von einer äußern Ursache afficirt wird: eben so bleibt, nach dem Gesetz der Gleichheit zwischen der Wirkung und Gegenwirkung, die Summe der Größen der Bewegung irgend einer Anzahl von Körpern, nach einer gegebenen Richtung geschätzt, dieselbe, ungeachtet der Stöße und der wechselseitigen Wirkung der einzelnen Körper auf einander, bis irgend ein äußerer Einfluß sie stört".

85. So verwickelt auch dieß System seyn mag, und selbst, wenn die Bewegung aus einem Körper in den andern durch eine Maschiene, oder durch eine Reihe von Mittelskörpern fortgepflanzt würde, so wird sich die Wirkung und Gegenwirkung aller Theile des Systems nichts desto weniger in ein System von einzelnen Wirkungen und Gegenwirkungen auflösen, deren zwey und zwey gleich und geradezu entgegengesetzt sind; denn alsdann geht die Wirkung, die zwischen den entferntern Körpern ausgeübt wird, aus einem in den andern durch unmittelbare Wirkung zwischen je zwey und zwey

an einander stoßenden Körpern auf einander, über.

86. Aus dem allen, was wir eben gesagt haben, geht hervor, daß die Größe der Bewegung, die irgend ein Körper gewinnt, die resultirende Bewegungsgröße der einzelnen Größen der Bewegungen ist, die angesehen werden, als ihm durch alle übrigen Körper des Systems mitgetheilt; und daß die verlohrne Größe der Bewegung das Resultat von allen denen ist, die man, als jedem der übrigen Körper von ihm mitgetheilt, betrachtet.

Folglich ist die resultirende Kraft aller der Kräfte, welche er mittheilt, jederzeit der resultirenden aller derer, welche er erhält, gleich und geradezu entgegengesetzt.

87. Dieses Gesetz gilt nicht bloß für harte Körper, sondern für Körper aller Art. Die Elasticität kann die Größe der Bewegung, welche sich die Körper gegenseitig mittheilen, vermehren. Aber weil sie, mit derselben Energie nach beyden einander entgegengesetzten Richtungen sich innerlich spannen und wieder nachlassen; so bleibt die Totalsumme nach jeder Richtung dieselbe. Genug, sagt Maclaurin: „wir kennen bey keinem Körper eine andere Art, wie er seine Kraft verliehre, als wenn er sie einem andern mittheilt.“

88. Es kann anfänglich scheinen, daß dieß

Gesetz in dem Falle, wo es fixe Puncte in dem Systeme giebt, eine Ausnahme erleiden muß; aber es ist Thatsache, daß es in der Natur keinen wahrhaft festen und unbeweglichen Punct wirklich giebt. Die Puncte, die man zur Erleichterung der Rechnungen als feste annimmt, sind bloß sehr beträchtliche Massen, die man im Verhältniß der andern Körper des Systems als unendlich groß ansieht. So ist der Unterstützungspunct, auf dem sich ein Hebel bewegt, an die Erdkugel fest geschlossen; man hält ihn nur für eins mit derselben: er scheint fest und ist es nicht, und die Größen der Bewegung, welche die an diesem Hebel aufgehangenen Körper verlieren, gewinnt die Erdkugel selbst, wo sie unmerklich und unschätzbar für uns werden; darum sehen wir diesen Unterstützungspunct als wirklich fest und fähig an, die ihm mitgetheilten Kräfte zu vernichten, und man muß in der Mechanik auf diese Kräfte so rechnen, als ob sie wirklich von dieser beständigen Gleichheit zwischen der Wirkung und Gegenwirkung in entgegengesetzter Richtung, eine Ausnahme machten.

89. Ueber die fünfte Hypothese. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn mehrere Körper auf einander einwirken, und das ganze System mit einer gemeinschaftlichen Bewegung, nach irgend einer Richtung fortgerissen wird, z. B. wenn eine Tafel, wie die eines Billiards, auf ein schwimmendes Schiff gesetzt wird, die Resultate, die nämlichen, wie oben sind; das heißt, die Kör-

per werden sich einer in Rücksicht auf den andern eben so verhalten, als wenn die Tafel fest und unbeweglich wäre.

In der That, es scheint ganz einfach, daß die Intensität des Stoßes zwischen zwey Körpern nicht von ihrer gemeinschaftlichen Bewegung abhängt, sondern einzig und allein von der Schnelligkeit, mit der sie sich einander zu nähern streben; sie stoßen und ziehen sich bloß, weil sie von Bewegungen getrieben werden, die mit einander unvereinbar sind. Man sieht folglich nicht ein, warum diese Bewegungen sich noch weiter einander verändern sollten, als so weit, als nothwendig ist, damit die Körper aufhören, einander sich Gewalt anzuthun, und ihre Bewegungen aufhören, unverträglich zu seyn; das heißt, die Größen der Bewegung, welche sich Körper, die durch Stoß oder Druck auf einander einwirken, einander mittheilen, hängen, der fünften Hypothese gemäß, nicht von ihren absoluten, sondern einzig und allein von ihren relativen Geschwindigkeiten ab.

Was den zweyten Theil der Hypothese anbetrifft, wo von der Wirkung die Rede ist, welche zwey, durch andere getrennte, Körper auf einander durch Stoß, Druck oder Zug ausüben: so lehrt die Erfahrung, daß die Wirkung nicht nach der geraden Linie, welche sie verbindet, fortgeht, wie bey denjenigen, die unmittelbar auf einander einwirken; sondern daß sie erst von diesen in die zunächst angränzenden übergeht; diese aber können einen Theil davon in sich nehmen; das, was übrig bleibt, wird von denselben auf die andern an sie stoßenden Körper übergetragen, und so fort von dem ersten, bis zu dem letzten der beyden, in Betrachtung gezognen, Körper; solchergestalt, daß die Wirkung sich jederzeit in eine Reihe von unmittelbaren Wirkungen auflößt. Es ist ganz natürlich, daß man dieß für nothwendig halten muß; denn wenn man die zwischen dem ersten und letzten liegenden Körper wegließe, so würden sie gar nicht mehr auf einander wirken, weil die Undurchdringlichkeit nun nicht mehr verhindern würde, daß jeder seinem Antriebe folgte. Es ist folglich nöthig, daß diese Wirkung erst in den nächsten Mittelskörpern aufgenommen wird, und von da fort, von einem zum andern, vom ersten bis zum letzten durchgehe.

Ueber die sechste Hypothese. Wenn zwey Kugeln, anstatt sich in der geraden Richtung zu stoßen, sich in einer schiefen stießen, das heißt, so, daß ihre Geschwindigkeiten nicht nach der Linie ihrer Mittelpuncte gerichtet würden, so würde das Gleichgewicht nicht Statt finden, die Geschwindigkeiten möchten auch seyn, welche sie wollten.

Man fühlt in der That, daß, wenn zwey Körper im Begriff sind, sich zu stoßen, die Größe der Bewegung, oder die todte Kraft, welche der eine dem andern mittheilt, auf ihrer gemeinschaftlichen Oberfläche in dem Punct der Berührung senkrecht gerichtet seyn muß; denn man sieht keinen Grund, warum sie gegen diese perpendikuläre Linie nach der einen Richtung mehr, als nach der andern, geneigt seyn sollte. Die Wechselwirkung zweyer Kugeln muß sich also nach der Linie der Mittelpuncte richten, und weil die Geschwindigkeiten eine andere Richtung haben, so können die beyderseits mitgetheilten Größen der Bewegung diese Geschwindigkeiten nicht vernichten. Man kann daher aus dieser Erfahrung, wie aus dem blossen Raisonnement, folgern, daß, dem Ausdruck der sechsten Hypothese gemäß, die Größen der Bewegung, welche sich die Körper gegenseitig durch ihren Stoß mittheilen, immer perpendikulär auf ihrer gemeinschaftlichen Oberfläche im Puncte der Berührung, gerichtet sind.

90. Ueber die siebende Hypothese. Die Erfahrung beweist, wie wir oben gesehen haben, daß Gleichgewicht Statt findet, wenn zwey harte Körper sich einander von entgegengesetzten Seiten, mit gleichen Größen der Bewegung, begegnen. Sie beweist auch, daß, wenn diese Körper mit ungleichen Größen der Bewegung getrieben werden, das Gleichgewicht nicht Statt findet, sondern, daß diese Körper nach dem Stoße gemeinschaftlich mit einander fortgehen werden.

Man sieht in der That nicht, was die Körper zwingen könnte in entgegengesetzten Richtungen zurückzuprallen. Man muß natürlich annehmen, daß bloß die Kraft der Stahlfedern, wieder in ihre vorige Stelle zurückzugehen, wenn solche vorhanden sind, es seyn könnte, was diese Wirkung hervorbrächte, und daß folglich, wenn die Körper, als vollkommen hart angenommen werden, sie bloß so weit auf einander wirken müssen, als es zur Vernichtung ihrer beyderseitigen Bewegung nöthig ist; und wenn man diese Voraussetzung, nach der Analogie, weiter verfolgt, so wird man auf den Gedanken geleitet werden, daß bey dem Stoße der harten Körper, und aus dem nämlichen Grunde bey dem Stoße der weichen, die ebenfalls keine Federkraft besitzen, in welcher Zahl und von welcher Gestalt sie auch seyn mögen, ihre relative Geschwindigkeit nach dem Stoße, das heißt, nach der Richtung ihrer gegenseitigen Wirkung auf einander, oder perpendikulär auf ihrer gemeinschaftlichen Oberfläche in den Puncten der Berührung geschätzt, jederzeit Null seyn muß.

91. Weil man im Gegentheil bey dem Stoße vollkommen elastischer Körper voraussetzt, daß die Wiedererlangung des vorigen Zustandes bey den Stahlfedern in den nämlichen Graden geschehe, als die Zusammendrückung nach der entgegengesetzten Richtung; so scheint der Schluß ganz einfach, daß die Körper sich nach dem Stoße mit derselben relativen Geschwindigkeit trennen werden, welche sie nach der entgegengesetzten Richtung vor dem

Stoße hatten; und dieß ist der stehenden Hypothese gemäß.

Die angeführten Hypothesen sind also auf die wahrscheinlichste Weise durch Thatsachen und durch Vernunftschlüsse gerechtfertiget; und wir können sie daher als die wahrhaften Gesetze der Natur ansehen und es erwarten, ob neue Phänomene sie bestätigen, oder sie umstoßen.

Verschiedene Folgerungen aus den vorhergegangenen Hypothesen. Was nennt man Kraft der Trägheit? Eigenschaften der Kräfte, die in einen Punct zusammenlaufen: Parallelkräfte und Mittelpunct der Schwere.

92. **Ueber die Kraft der Trägheit.** Zufolge der ersten Hypothese beharrt jeder Körper in seinem Zustande der Ruhe, oder der gleichförmigen und geradlinigten Bewegung, bis er durch die Wirkung eines andern Körpers daraus vertrieben wird; sobald dieser andere Körper den erstern trifft, so nimmt jeder dieser Körper eine neue Größe der Bewegung an, welches die resultirende von derjenigen, welche er vorher hatte, und derjenigen, welche er gewinnt, ist; und es versteht sich, daß die Größe der Bewegung, welche er gewinnt, ihm durch den andern Körper mitgetheilt worden ist. Also bekommt der erste der obigen

Körper von dem zweyten eine gewisse Größe der Bewegung, die sich mit der, welche er schon hatte, verbindet, und so die resultirende giebt, die er nachher haben muß; umgekehrt theilt aber auch dieser, vermöge des Prinzips der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, dem zweyten Körper eine Bewegungsgröße mit, die der, welche er empfängt, gleich ist. Diese Bewegungsgröße nun, welche ein jeder von diesen Körpern dem andern mittheilt, wenn der letztere die Bewegung des ersteren stört, heißt die **Kraft der Trägheit** des ersten.

93. Das nämliche gilt, wenn von einem ganzen Systeme von Körpern die Rede ist.

Man nennt dann **Kraft der Trägheit** eines jeden von ihnen den Widerstand, den er in einem jeden Augenblicke der Veränderung seines Zustandes entgegensetzt, das heißt, die Gegenwirkung, welche er gegen ein System anderer Körper ausübt, die ihn aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung, oder aus der Bewegung zur Ruhe, oder aus einer Bewegung in eine andere versetzen. Es ist mit einem Worte, eine Kraft, die derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, welche man diesem beweglichen Körper mittheilen muß, damit er aus dem Zustande, in dem er sich befindet, in den übergehe, in welchen er sich den Augenblick darnach befinden wird.

Woraus folgt, daß, wenn man die wirkliche Geschwindigkeit eines beweglichen Körpers vor dem Stoße, in zwey andere zerlegt, deren eine die ist, welche er nach dem Stoße annehmen muß, so wird die andere, multiplicirt durch die Masse dieses beweglichen Körpers, das seyn, was man **Kraft der Trägheit** im Augenblicke des Stoßes nennt.

94. Man muß die **Kraft der Trägheit** nicht mit der **verlohrnen Bewgungsgröße** verwechseln. Um diese zu bekommen, muß man (41.) die Geschwindigkeit, welche der bewegliche Körper, wenn er frey gewesen wäre, den Augenblick darauf angenommen haben würde, in zweye zerlegen, deren eine die ist, welche er wirklich nehmen wird; so wird die andere, multiplicirt durch die Masse des beweglichen Körpers, die verlohrne Bewegungsgröße seyn. Der Unterschied ist, daß man im letzten Falle die Geschwindigkeit zerlegen muß, mit welcher sich der Körper den Augenblick darnach bewegen will; anstatt daß für die Kraft der Trägheit, die Geschwindigkeit, mit welcher er sich wirklich den Augenblick vorher bewegt, zerlegt werden muß. Dieß ist nun nicht immer eins und dasselbe, weil in dem Augenblick des Stoßes, eine bewegende Kraft hinzukommen kann, welche auf die Zerlegung, welche man machen muß, um die Kraft der Trägheit zu bekommen, keinen Einfluß hat, wohl aber auf die, welche man machen muß, um die verlohrne Geschwindigkeit zu erhalten. Diese

beyden Größen, nämlich die Kraft der Trägheit und die verlohrne Bewegungsgröße fallen in Eins zusammen, wenn das System sich einzig und allein, vermöge einer von vorn herein erlangten Bewegung, bewegt, weil dann, zufolge der zweyten Hypothese, jeder Körper, wenn er frey wäre, die vorher erlangte Geschwindigkeit behalten würde. Aber es ist nicht das nämliche, wenn die Körper durch neue bewegende Kräfte angetrieben werden; denn dann ist es klar, daß die Größe der Bewegung, die jeder Körper, wenn er frey wäre, annehmen würde, aus der, welche er von vorn herein gehabt hatte, und aus der, welche die bewegende Kraft in ihm erregt, zusammengesetzt ist. Die durch den Stoß verlohrne Größe der Bewegung ist also dann das Resultat dreyer Kräfte, nämlich: 1) der Größe der von Anfang erhaltenen Bewegung, oder der vor dem Stoße, 2) der durch die bewegende Kraft mitgetheilten Größe der Bewegung, 3) derjenigen Größe der Bewegung, die der, welche dem beweglichen Körper nach dem Stoße übrig bleiben soll, gleich und entgegengesetzt ist. Aber nach der Definition, welche wir eben von der Kraft der Trägheit gegeben haben, ist die Bewegungsgröße, welche sie mittheilt, die resultirende von der ersten und der letzten dieser drey Kräfte, von denen wir eben gesprochen haben.

Folglich ist die verlohrne Größe der Bewegung die resultirende von der durch die bewegende Kraft hervorgebrachten Größe der Bewegung, und von der durch die Kraft der Trägheit bewirkten Bewegungsgröße.

95. Wenn ein Stoß Statt findet, das heißt, eine plötzliche, gewaltsame Veränderung in der Bewegung des Körpers, so ist die Größe der Bewegung, welche die bewegende Kraft hervorbringt, unendlich klein im Verhältnisse gegen die verlohrne Bewegungsgröße, und folglich ist diese verlohrne Größe der Bewegung dann um unendlich wenig von der Kraft der Trägheit verschieden. Wenn sich aber die Bewegung in unmerklichen Graden veränderte, so ist die während einer unendlich kurzen Zeit verlohrne Größe der Bewegung, selbst unendlich klein; sie ist es, welche sich durch den Druck der Körper gegen einander, durch die Spannung der Fäden, oder überhaupt durch die Wechselwirkung der Körper vernichtet; mit einem Wort, sie ist das, was man unter dem bloßen Ausdruck Kraft bey einem Systeme, das im Gleichgewicht ist, versteht. Wir wollen sie mit dem Namen der durch den beweglichen Körper ausgeübten Kraft (force exercée) bezeichnen.

96. Aus dem Vorhergegangenen wird also folgen, daß die in jedem Augenblick, durch jeden Körper des Systems ausgeübte Kraft die resultirende von der bewegenden Kraft und der Kraft der Trägheit ist. Folglich ist umgekehrt die Kraft der Trägheit die resultirende von der, durch den beweglichen Körper auf alle

andere Körper des Systems, durch Druck oder Spannung ausgeübten Kräfte, und einer Kraft, die ihrer bewegenden Kraft gleich und gerade zu entgegengesetzt ist.

Folglich, wenn die bewegende Kraft Null ist, das heißt, wenn das System sich einzig und allein, vermöge einer von vorn herein erlangten Bewegung, bewegt, die sich bloß nach der Wirkung, welche die Körper in jedem Augenblick gegen einander ausüben, verändert, so wird die Kraft der Trägheit für jeden Körper und für jeden Augenblick dem Druck, oder Zug, welchen er erfährt, gleich und geradezu entgegengesetzt seyn.

97. Wenn dagegen alle Körper frey sind, und sich bloß, vermöge der bewegenden Kräfte, wie z. B. der Schwere, bewegen, dann ist die Kraft der Trägheit eines jeden in jedem Augenblicke bloß seiner bewegenden Kraft gleich und in gerader Richtung entgegengesetzt.

98. Endlich, im Falle, wenn Gleichgewicht oder eine gleichförmige Bewegung Statt findet, so ist die Kraft der Trägheit jederzeit = Null, wie auch hierbey die bewegenden Kräfte, denen das System überlassen ist, beschaffen seyn mögen. Denn die Kraft der Trägheit drückt die Veränderung, die sich in dem Systeme zuträgt, nicht in so fern aus, als man die Bewegungen, welche es anzunehmen strebt, als erlangt ansieht, sondern

nur in Bezug auf die wirklichen Bewegungen, welche es schon vor der Wirkung der bewegenden Kraft erlangt hatte. „Ich muß bemerken", sagt Euler, im 66sten seiner Briefe an eine deutsche Prinzessin, „daß man sehr unschicklich diejenige Eigenschaft der Körper, vermöge welcher sie in ihrem Zustande bleiben, Kraft nennt. Denn, wenn man unter dem Worte Kraft alles dasjenige versteht, was fähig ist, den Zustand der Körper zu verändern, so ist die Eigenschaft, vermöge welcher sie sich in dem Ihrigen erhalten, vielmehr das Entgegengesetzte einer Kraft. Es ist folglich ein Mißbrauch, daß einige Schriftsteller der Trägheit, welche eben jene Eigenschaft ist, den Namen Kraft geben, und daß sie sie Kraft der Trägheit nennen. Dieser Mißbrauch kann zu sehr groben Fehlern führen".

Diese Bemerkung von Euler ist auffallend; allein diese Fehler sind leicht zu vermindern, wenn man das, was man schlechthin Trägheit nennt, von der Kraft der Trägheit unterscheidet. Die Trägheit ist bloß eine Eigenschaft, die nicht berechnet werden kann, aber die Kraft der Trägheit ist eine wahre Größe, die einer genauern Schätzung fähig ist. Die Trägheit ist schlechthin die Eigenschaft jedes Körpers, in seinem Zustande der Ruhe oder seiner gleichförmigen und geradlinigten Bewegung zu bleiben, und die Kraft der Trägheit (94.) ist die Größe der Bewegung, welche dieser Körper jedem andern mittheilt, der ihn aus diesem Zustande herausreißen will. Die Kraft der Trägheit hat folglich sehr richtig den Charakter dessen, was man überhaupt Kraft nennt, das heißt, alles dessen, was den Zustand der Ruhe oder der Bewegung der Körper verändert. Denn weil sie eine mitgetheilte Bewegungsgröße ist, so verändert sie nothwendig den Zustand des Körpers, dem sie eingedrückt wird; und was den Zustand des Körpers, der sie ihm eindrückt, betrifft, so wird auch er zugleich verändert, allein dieß geschieht durch die Gegenwirkung des andern Körpers, die ihrerseits wiederum nichts anders, als die Kraft der Trägheit dieses andern Körpers ist. Also wird der Zustand dieser beyden Körper, die sich einander stoßen, bey jedem durch die Kraft der Trägheit des andern verändert; und er selbst drückt diesem eine gleiche Größe von Bewegung, nach entgegengesetzter Richtung durch seine eigene Trägheit ein.

99. Wir wollen dt das Zeitelement, oder den unendlich kurzen Zeitraum nennen, während dessen man sich die Wirkung der bewegenden Kraft, und die der Kraft der Trägheit denken kann; M die Masse des Körpers, Mp die bewegende Kraft, Mq die Kraft der Trägheit, und folglich $Mpdt$, $Mqdt$ ihre Wirkungen, das heißt, die Größen der Bewegung, die sie beyderseits in M während dt erregen würden. Die während dt verlohrne Bewegungsgröße wird folglich die resultirende von $Mpdt$ und $Mqdt$ seyn.

Es sey V die Geschwindigkeit des Körpers in einem gegebenen Augenblick, dV ihr Zuwachs, während dt, z der Winkel, welchen diese Geschwindigkeit V und die beschleunigende Kraft p mit einander machen. So wird folglich die bewegende Kraft Mp, geschätzt nach der Richtung V, $Mp \cos. z$ seyn, und folglich wird die nach dieser Richtung während dt eingedrückte Bewegungsgröße $Mpdt \cos. z$ seyn.

Anderntheils wird die Bewegungsgröße MV während dt nach der Richtung V um die Größe MdV zunehmen; folglich wird $-MdV$ das seyn, was wir die Wirkung der Kraft der Trägheit genannt haben, ebenfalls nach der Richtung von V geschätzt, folglich ist $Mpdt \cos. z - MdV$ die resultirende von diesen beyden Kräften, jede nach der Richtung V geschätzt; folglich ist dieß die von M während dt verlohrne Bewegungsgröße, nach der Richtung von V geschätzt. Diese verlohrne Bewegungsgröße aber ist die Wirkung der von M ausgeübten Kraft des Druckes, multiplicirt durch die Zeit dt, während welcher sie ausgeübt wird. Folglich ist in jedem Augenblick diese ausgeübte Kraft, nach der Geschwindigkeit V des beweglichen Körpers geschätzt,

$$Mp \cos. z - M\frac{dV}{dt}$$

100. Wenn man das System irgend eine an-

dere Bewegung annehmen ließe, so daß dann u die neue Geschwindigkeit von M ausdrückte, x den von dieser neuen Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft p, und y den von den beyden Geschwindigkeiten V und u eingeschloßnen Winkel: so ist klar, daß $Mp \cos. x$ die bewegende Kraft, nach der Richtung dieser neuen Geschwindigkeit u geschätzt, und $V \cos. y$ die erstere Geschwindigkeit nach der Richtung der zweyten geschätz, seyn würde: daß folglich $d (V \cos. y)$ die Zunahme dieser Geschwindigkeit, nach der Richtung von u geschätzt, seyn würde. Mithin würde $- M \frac{d (V \cos. y)}{d t}$ die Kraft der Trägheit, nach derselben Richtung von u geschätzt, seyn; und die Kraft des Druckes, welchen M in jedem Augenblicke ausübt, nach der Richtung von u geschätzt, würde mithin seyn

$$M p \cos. x - M \frac{d (V \cos. y)}{d t}$$

101. **Ueber die Kräfte, die in einem und ebendemselben Punct zusammenkommen.** Wir wollen uns irgend ein System von Kräften $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, (Fig. 12.) an einem und demselben Puncte M angebracht, denken, von deren $\overline{MK}$ die resultirende seyn mag. Durch den Punct M wollen wir irgend eine gerade unbestimmte Linie $\overline{MF}$ ziehen, und auf die-

ser willkührlich einen Punct F annehmen. Von den Puncten A, B, C, K wollen wir Perpendikulärlinien $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Kk}$ auf $\overline{MF}$ fällen, und aus dem Puncte F Perpendikulärlinien $\overline{Fa^1}$, $\overline{Fb^1}$, $\overline{Fc^1}$, $\overline{Fk^1}$ auf die Richtungen der Kräfte. Dieß angenommen, werden die ähnlichen Dreyecke MAa, und MFa' geben:

$$\overline{MA} : \overline{Ma} :: \overline{MF}, \overline{Ma^1} \text{ oder}$$
$$\overline{MA} \cdot \overline{Ma^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Ma}$$

aus demselben Grunde wird man haben

$$\overline{MB} \cdot \overline{Mb^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Mb}$$
$$\overline{MC} \cdot \overline{Mc^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Mc}$$
$$-\overline{MK} \cdot \overline{Mk^1} = -\overline{MF} \cdot \overline{Mk}$$

Wenn man alle diese Gleichungen zusammennimmt, so wird, da das letzte Glied der Totalgleichung sich auf o reducirt, weil $\overline{Mk} = \overline{Ma} + \overline{Mb} + \overline{Mc}$, herauskommen:

$$\overline{MA} \cdot \overline{Ma^1} + \overline{MB} \cdot \overline{Mb^1} + \overline{MC} \cdot \overline{Mc^1}$$
$$= \overline{MK} \cdot \overline{Mk^1}.$$

das heißt, die Summe der Producte, jeder der verbundenen Kräfte, multiplicirt durch den Abstand $\overline{MF}$ des Punctes, in welchem die Kräfte zusammentreffen, von irgend einem Puncte F im

Raume, geschätzt nach der Richtung dieser Kraft, ist gleich der resultirenden Kraft, ebenfalls mit der Entfernung $\overline{MF}$ multiplicirt, und nach der Richtung dieser Kraft geschätzt.

Wenn die resultirende Kraft $MK = 0$ wäre, so würden die übrigen Kräfte sich wechselseitig im Gleichgewicht halten; **folglich ist in dem Falle, wenn mehrere nach einem und ebendemselben Puncte gerichtete Kräfte sich einander im Gleichgewicht halten, die Summe der Producte aus jeder von diesen Kräften in den Abstand des Vereinigungspunctes von irgend einem beliebig in dem Raume angenommnen Puncte, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, gleich o.**

102. Dieselben ähnlichen Dreyecke MAa, MFa^1, welche wir oben betrachtet haben, geben auch

$$\overline{MA} : \overline{Aa} :: \overline{MF} : \overline{Fa^1} \text{ oder}$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{Fa^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Aa}$$

und aus demselben Grunde erhält man

$$\overline{MB} \cdot \overline{Fb^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Bb}$$

$$- \overline{MC} \cdot \overline{Fc^1} = \overline{MF} \cdot \overline{Cc}$$

$$- \overline{MK} \cdot \overline{Fk^1} = - \overline{MF} \cdot \overline{Kk}.$$

Wenn man alle diese Gleichungen zusammennimmt, so hat man: $\overline{MA} \cdot \overline{Fa'} + \overline{MB} \cdot \overline{Fb'} - \overline{MC} \cdot \overline{Fc'} - \overline{MK} \cdot \overline{Fk'} = \overline{MF} \, (\overline{Aa} + \overline{Bb} - \overline{Cc} - \overline{Kk})$.

103. Wenn alle diese Kräfte in einer und ebenderselben Ebene lägen, so würde sich der zweyte Factor des letzten Gliedes auf Null reduciren (27.); man bekäme folglich $\overline{MA} \cdot \overline{Fa'} + \overline{MB} \cdot \overline{Fb'} - \overline{MC} \cdot \overline{Fc'} = \overline{MK} \cdot \overline{Fk'}$. Das heißt: die Summe der Momente der gegebenen Kräfte, in Rücksicht irgend eines in der Ebene dieser Kräfte angenommnen Punctes F, und zwar diejenigen, welche so, wie MC, eine Bewegung nach der nämlichen Richtung, wie die resultirende, um diesen Punct herum zu bewirken streben, negativ genommen, würde gleich seyn dem Momente dieser resultirenden Kraft, in Rücksicht des nämlichen Punktes.

104. Wenn die Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen, und man das ganze System für irgend eine Ebene verzeichnet und den Punct F als die Projection einer geraden Linie, oder einer Axe, die auf dieser Ebene senkrecht steht, betrachtet; so wird man durch das nämliche Raisonnement folgern, daß das Moment der resultirenden Kraft, in Bezug auf diese Axe, gleich ist der Summe

der Momente der zusammensetzenden Kräfte, in Bezug auf die nämliche Axe.

105. Wenn die resultirende Kraft o ist, so halten sich die gegebenen Kräfte gegenseitig im Gleichgewicht, folglich:

ist in jedem Systeme von Kräften, die sich um irgend einen gegebenen Punct herum im Gleichgewicht befinden, die Summe der Momente der Kräfte, in Bezug auf irgend eine in dem Raume gezogne Axe, gleich Null, indem man diejenigen von diesen Kräften, welche nach der einen Richtung zu drehen streben, positiv, und die, welche nach der entgegengesetzten Richtung hin drehen wollen, negativ nimmt.

106. Was wir so eben über die Kräfte, die in einem und ebendemselben Puncte zusammen laufen, gesagt haben, gilt eben so wohl für jedes andere System von Kräften, die sich im Gleichgewicht befinden, weil jede von ihnen, zufolge der zweyten Hypothese, derjenigen, die aus allen andern resultirt, gleich und gerade zu entgegengesetzt ist; dieß führt alle mögliche Fälle auf den zurück, wo alle Kräfte in einem und ebendemselben Puncte zusammenlaufen.

107. **Ueber die parallelen Kräfte.** Parallelkräfte können als in einem und ebendemselben unendlich weit entfernten Puncte zusammenlaufend gedacht werden. Daraus folgt augenscheinlich: 1) daß die aus mehreren Parallelkräften resultirende Kraft gleich ist der Summe derselben, diejenigen, welche eine dieser resultirenden entgegengesetzte Richtung haben, als negativ angesehen; 2) daß die Summe der Momente aller dieser Parallelkräfte, in Rücksicht auf irgend eine in dem Raume angenommne Axe, gleich ist dem Momente der resultirenden Kraft, in Rücksicht auf dieselbe Axe, wiederum diejenigen unter diesen Kräften, welche eine Bewegung um diese Axe herum, nach einer dieser resultirenden entgegengesetzten Richtung, zu bewirken streben, als negativ angenommen.

So z. B. wenn das System sich auf zwey Parallelkräfte $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ reducirte, die an den beyden Enden eines Hebels angebracht und um einen festen Punkt K herum im Gleichgewicht wären, so würde die aus diesen beyden Kräften resultirende, welche jederzeit derjenigen, die diese beyden verbundenen Kräfte im Gleichgewicht hält, gleich und entgegengesetzt ist, nothwendig durch den festen Punct K gehen; und wenn das Moment dieser resultirenden, in Rücksicht dieses Punctes K, Null wäre, so müßten die beyden Momente $\overline{Aa} \cdot \overline{KA}$ und $\overline{Bb} \cdot \overline{KB}$ unter sich gleich seyn, das heißt, die Kräfte A a, B b müßten im umgekehrten Verhältniß ihrer Hebelarme stehen.

108. Diesen Satz, den ältesten, den man über die Gesetze des Gleichgewichts kennt, entdeckte bekanntlich Archimedes; und er hat jederzeit für einen Hauptgrundsatz gegolten. Sein inniger Zusammenhang mit dem des Parallelogramms der Kräfte ist leicht einzusehen. In der That:

Man denke sich einen Hebel F K A (Fig. 10.) der an dem festen Puncte K ein Knie macht, und dessen Arme $\overline{KA}$, K F gleich sind. Wenn man an denselben zwey gleiche Kräfte $\overline{Aa}$, $\overline{BB'}$ senkrecht anbringt, so ist kein Grund vorhanden, warum eine das Uebergewicht über die andere erhalten sollte; also wird Gleichgewicht Statt finden.

Wir wollen den Arm des Hebels $\overline{KA}$ über den Punct K hinaus verlängern, bis er die Richtung F B B' der an den Punct F angebrachten Kraft schneidet und uns diese Kraft F, jetzt in dem Puncte B ihrer Richtung angebracht vorstellen, so wird das Gleichgewicht nicht gestört werden; also werden die an den Enden, A, B des Hebels A K B, dessen Arme ungleich sind, angebrachten Kräfte $\overline{A a}$, $\overline{B B'}$ sich im Gleichgewicht befinden. Dieß angenommen:

So ist die Kraft $\overline{B B'}$, nach der Richtung $B b$ geschätzt, welche Richtung auf dem neuen Hebel senkrecht steht, augenscheinlich die einzige, welche auf den Punct A wirkt; denn diejenige, welche $\overline{B B'}$, nach der Richtung $\overline{B b'}$ des Hebels, der an dem festen Puncte K zieht, geben würde, ist durch diesen selbst vernichtet; folglich ist es einzig und allein die Kraft $\overline{B b}$, welches nichts anders, als die erstere $\overline{B B'}$, nur perpendikulär auf dem Hebel stehende geschätzt, ist, welche der Kraft $\overline{A a}$ das Gleichgewicht hält. Es ist folglich noch übrig, das Verhältniß der Kraft $\overline{A a}$ zu der Kraft $\overline{B b}$ zu finden.

Nun geben die ähnlichen Dreyecke $B B' b$; und $B K F$. $\overline{B B'} : \overline{B b} :: \overline{B K} : \overline{F K}$ oder $\overline{B B'} \cdot \overline{F K} = \overline{B b} \cdot \overline{B K}$. aber $\overline{B B'} = \overline{A a}$ und $\overline{F K} = \overline{K A}$; folglich $\overline{A a} \cdot \overline{K A} = \overline{B b} \cdot \overline{B K}$. Das heißt, die beyden Kräfte $\overline{A a}$, $\overline{B b}$, die sich beyde an den Enden des geraden Hebels $B K A$ das Gleichgewicht halten, müssen im umgekehrten Verhältniß ihrer Hebelarme stehen.

109. Das, was wir so eben bloß von zwey an dem Hebel angebrachten Parallelkräften gesagt haben, erstreckt sich augenscheinlich auf jede beliebige Zahl von Parallelkräften, die um denselben Hebel im Gleichgewicht sind. Denn da die resultirende von allen diesen Kräften inwendig durch den fixen Punct hindurch geht; so wird ihr Moment, in Rücksicht auf diesen fixen Punct, Null seyn, und folglich wird, wenn man alle Momente auf diesen fixen Punct bezieht, die Summe der Momente von derjenigen dieser Kräfte, die diesen Hebel nach der einen Richtung zu drehen streben, der Summe der Momente von denjenigen Kräften, die ihn nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben, gleich seyn.

110. Wir wollen uns mehrere Körper A, B, C, D u. s. f. (Fig. 11.) denken, die, von verschiedenen Kräften angetrieben, alle unter sich parallel sind. Man sieht aus den oben dargestellten Grundsätzen ein, daß man, um die resultirende der beyden Kräfte A, B zu finden, die gerade Linie $\overline{AB}$ in dem Puncte m in Theile theilen muß, die diesen Kräften wechselseitig proportionirt sind; daß ferner diese resultirende A + B seyn, daß sie durch den Punct m gehen, und daß sie mit den erstern parallel seyn wird. Ist diese resultirende gefunden, so wird man aus demselben Grunde bloß die gerade Linie $\overline{mC}$ im Puncte n, in dem wechselseitigen Verhältnisse dieser resultiren-

den $A + B$ und der Kraft C, zu theilen brauchen, und wenn man durch den Punct n eine Parallele mit den gegebenen Kräften zieht, so wird sie die Richtung der aus den drey Kräften A, B, C, resultirenden angeben; und diese resultirende wird $A + B + C$ seyn. Indem man nun so fort mit allen andern Kräften des Systems auf gleiche Weise verfährt, so wird man den Punct Q finden, durch welchen die Richtung der allgemeinen resultirenden gehen muß. Diese resultirende wird die Summe aller der zusammensetzenden Kräfte, und eben diesen Kräften parallel seyn.

Nun muß man bemerken, daß die oben angezeigte Construction keinesweges von der Richtung der Kräfte, sondern bloß von ihrer Größe und ihrer parallelen Lage abhängt. So würden die Puncte m, n, o, p, Q jederzeit dieselben seyn, wenn die Kräfte nur dieselben blieben und bloß ihre Richtung veränderten, dabey aber ihren Parallelismus behielten. Diese Puncte heißen Mittelpuncte der Parallelkräfte; das heißt also, der Mittelpunct der Parallelkräfte A, B, ist m; der der Parallelkräfte A, B, C, ist n, u. s. f.; und endlich ist Q das Centrum der Parallelkräfte des ganzen Systems.

111. Denken wir uns von jedem der Puncte A, B, C u. s. w. m, n, o, p u. s. w. Per-

pendikulärlinien $\overline{A a'}$, $\overline{B b'}$, $\overline{m m'}$, auf irgend eine Ebene gefällt, so ist leicht einzusehen, daß, weil die Momente $A \cdot \overline{A m}$, $B \cdot \overline{B m}$ im Verhältniß zu dem Puncte m einander gleich sind, man in Rücksicht auf irgend einen beliebigen, in der Richtung von $A B$ angenommnen Punct m'', wird erhalten müssen:

$$A \cdot \overline{A m''} + B \cdot \overline{B m''} = (A + B)\, \overline{m m''};$$

denn man hat

$$\overline{A m''} = \overline{A m} + \overline{m m''},\quad \overline{B m''} = \overline{m m''} - \overline{B m}.$$

Wenn wir diese Werthe in der Gleichung $A \cdot \overline{A m} - B\, \overline{B m} = 0$ substituiren, welche die Gleichheit der Momente in Bezug auf den Punct m giebt; so erhalten wir

$$A\, \overline{A m''} + B \cdot \overline{B m''} = |A + B|\, \overline{m m''}.$$

Man könnte durch ein ähnliches Raisonnement, indem man die aus A und B zusammengesetzte Kraft $A + B$ als eine einzige, an dem Punct m angebrachte Kraft ansähe, und n', o', p', q' ꝛc. die Puncte nennte, wo in die von den Puncten n, o, p, q ꝛc. auf dieselbe Ebene herab gefällten Perpendikel hintreffen würden; man könnte, sage ich, auf eine ähnliche Art beweisen, daß man

$$A \cdot \overline{Aa'} + B \cdot \overline{Bb'} + C \cdot \overline{Cc'} + D \cdot \overline{Dd'} = (A + B + C + D)\,\overline{oo'},$$

und so fort bekommen müsse. Das heißt, daß überhaupt

in einem System von Parallelkräften die Summe der Momente dieser Kräfte, in Bezug auf eine gegebene Ebene, oder, die Summe der Producte aus jeder dieser Kräfte in die Entfernung von dem Puncte, wo sie auf irgend einer gegebenen Ebene angebracht ist, gleich ist der Summe aller dieser Kräfte, multiplicirt durch die Entfernung von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte in derselben Ebene.

Folglich, wenn man A, B, C, D ꝛc. mehrere parallel an beliebigen Körpern angebrachte Kräfte nennt; a, b, c, d ꝛc. die Entfernungen von diesen Körpern auf irgend einer Fläche; p die Entfernung von dem allgemeinen Mittelpuncte dieser Kräfte in derselben Fläche, so wird man haben

$$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + \text{etc.} = (A + B + C + \text{etc.})\,p;$$

folglich

$$p = \frac{A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + \text{etc.}}{A + B + C + \text{etc.}}$$

112. Ueber den Mittelpunct der Schwere oder den Schwerpunct. Wenn alle Körper unter sich auf eine unveränderliche Art verbunden sind, so wird die oben (110.) angezeigte Construction, um den Mittelpunct der Kräfte zu bestimmen, augenscheinlich immer dieselbe seyn, welche Stellung man auch diesem Systeme geben mag, vorausgesetzt, daß die Kräfte immer dieselben bleiben, wie zuvor, und parallel mit ihren ersten Richtungen; folglich wird dieser Mittelpunct der Kräfte jederzeit, in Rücksicht jedes Körpers des Systems eine und dieselbe Lage behalten.

113. Gesetzt, diese Kräfte nun wären die Gewichte der Körper A, B, C, D ꝛc., so wird das Centrum der Kräfte das seyn, was man den Schwerpunct des Systems nennt.

Folglich verändert sich in einem Systeme von Körpern, deren Theile unveränderlich unter sich verbunden sind, in Rücksicht der verschiedenen Theile dieses Systems, nichts, welche Stellung man ihm auch in dem Raume geben mag.

Und weil die Schwerkraft constant ist, das heißt, weil die Gewichte jederzeit den Massen proportionirt sind, so wird der Abstand dieses Schwerpunctes von irgend einer Ebene gleich seyn der Summe der Producte aus jeder dieser Massen in ihre Entfernung von der gegebenen Ebene, dividirt durch die Summe der Massen.

114. Folglich, wenn das System seine ganze Stellung verändert, oder wenn die verschiedenen Theile dieses Systems ihre Stellung unter einander verändern, so wird der Weg, den der Schwerpunct wird zurückgelegt haben, um sich derselben Ebene zu nähern, gleich seyn der Summe der Producte aus jeder Masse, in den Weg, den sie gemacht haben wird, um sich ebenderselben Ebene zu nähern, dividirt durch die Summe dieser Massen; und wenn sich einige unter diesen Körpern von jener Ebene entfernten, anstatt sich ihr zu nähern, so müßten diese Entfernungen in der vorhergehenden Gleichung als negativ eintreten.

115. Folglich ist die Geschwindigkeit des Schwerpunctes in irgend einem System von Körpern, seine verschiedenen Theile mögen unter sich verbunden seyn, oder nicht; diese Geschwindigkeit, sage ich, nach irgend einer beliebigen Richtung geschätzt, ist gleich der Summe der Producte aus jeder Masse in ihre Geschwindigkeit, nach dieser Richtung geschätzt, dividirt durch die Summe dieser Massen, oder durch die Totalmasse des Systems.

116. Folglich ist die Summe der Bewegungsgrößen der verschiedenen Theile eines Systems von Körpern, nach irgend einer Richtung geschätzt, gleich der Totalmasse des Systems, multiplizirt durch die Geschwindigkeit des Schwerpunctes, nach derselben Richtung genommen, die Körper mögen nun unabänderlich unter sich verbunden seyn oder nicht.

117. Denken wir uns irgend ein System von Körpern, an welche beliebige Kräfte angebracht seyn mögen. Wir zerlegen jede dieser Kräfte in drey andere, mit drey gegebenen auf einander senkrecht stehenden Axen parallel; so wird das allgemeine System der Kräfte ebenfalls auf drey Systeme von Parallelkräften zurückgebracht seyn, und man wird auf jede von ihnen anwenden können, was wir im Allgemeinen von den Eigenschaften irgend eines Systems von Kräften, die unter sich parallel sind, gesagt haben. A, B, C, D ꝛc. mögen diese Kräfte seyn; wir wollen jedem der Körper, welche sie in Bewegung setzen, irgend eine Bewegung mittheilen, wir wollen A', B', C', D' ꝛc. die einem jeden dieser Körper zukommenden Geschwindigkeiten nennen, und ferner wollen wir durch $A^\wedge A'$, $B^\wedge B'$, $C^\wedge C'$..... die Winkel, die zwischen der Richtung der Kraft eines jeden beweglichen Körpers, und der Richtung seiner Geschwindigkeit liegen, bezeichnen; das

heißt, das Zeichen $A \wedge A^1$ drückt den Winkel aus, der zwischen den Richtungen A und A^1 liegt. Eben so ist es bey den andern.

Endlich wollen wir a, $\underline{a}$, α, die drey Kräfte, in welche A parallel mit den drey gegebenen Axen zerlegt worden ist, nennen, und a^1, $\underline{a}^1$, α^1 die drey Geschwindigkeiten, in welche man die Geschwindigkeit A^1, parallel mit denselben Axen, zerlegen kann. Eben so bey den andern.

118. Es wird in der Geometrie bewiesen, daß, wenn zwey gerade Linien sich unter einem Winkel schneiden, und wenn man diese beyden geraden Linien auf jeder der Axen verzeichnet, das Product aus diesen beyden geraden Linien in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels gleich ist der Summe der drey Producte ihrer Verzeichnung auf jeder dieser Axen.

Folglich werden wir haben:

$$A \cdot A^1 \cdot \cos. A \wedge A^1 = a a^1 + \underline{a a^1} + \alpha \alpha^1 \text{ und}$$

eben so

$$B \cdot B^1 \cdot \cos. B \wedge B^1 = b b^1 + \underline{b b^1} + \beta \beta^1$$

$$C \cdot C^1 \cdot \cos. C \wedge C^1 = c c^1 + \underline{c c^1} + \gamma \gamma^1.$$

etc. etc. etc.

Diese Formeln sind in der Theorie der Mechanik sehr nützlich, wo ihr gewöhnlichster Gebrauch der ist, die Bewegungen des betrachteten Systems auf drey unter sich perpendikuläre Axen zu bringen.

Neue Folgerungen, die aus den oben aufgestellten Hypothesen hervorgehen. Uebereinstimmung dieser Resultate mit andern, allgemein bekannten Thatsachen.

119. Die Grundgesetze des Gleichgewichts und der Bewegung sind in den oben festgesetzten Hypothesen begriffen, und wir könnten jetzt zu dem zweyten Theile, dessen Zweck es ist, diese Gesetze durch algebraische Formeln auszudrücken, übergehen; aber es scheint passender, diese Resultate zuerst durch die Vergleichung einiger neuen allgemein bekannten Thatsachen, mit den ersten Folgerungen, die aus diesen Hypothesen hervorgehen, gewissermaaßen schon im voraus zu erforschen.

Indem man über die alltäglichsten Phänomene nachdenkt, so muthmaßt man oft schon gewisse Prinzipien, denen man sich ohne Zweifel nur mit Gefahr würde überlassen können, ehe man es dahin gebracht hat, ihnen die mathematische Bündigkeit und Strenge zu geben, welche aber nichts desto weniger herrliche Anzeigen des Ziels sind, auf welches man diese Untersuchung richten muß. Auf diese Art ist allmählig der größte Theil der wichtigsten und gebräuchlichsten

Grundsätze der Mechanik entdeckt worden, wie das der virtuellen Geschwindigkeiten; das der Erhaltung lebendiger Kräfte so wohl bey dem Stoße elastischer Körper, als bey den Systemen harter Körper, deren Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert; das der Stellung des Schwerpunctes in den möglichst tiefsten Punct bey Maschinen von Gewicht; das der kleinsten Wirkung im System von Körpern, die von Centralkräften in Bewegung gesetzt werden u. s. w.

120. Diese Grundsätze wurden gewissermaßen anfänglich unbestimmt, und wie durch Instinct wahrgenommen, und mehr auf ihre Uebereinstimmung mit einzelnen Resultaten, zu welchen man auf anderen Wegen gelangte, als auf allgemeine und strenge Beweise gestützt. Aber die Mühe, welche man sich gegeben hat, um ihnen die gehörige Vollkommenheit zu verschaffen, ist nützlich gewesen, und auf die Art hat man es dahin gebracht, sie für den Calkul zu eignen, und die ganze Mechanik auf einfache Untersuchungen der Analysis zurückzuführen. Dieser allgemeine Ueberblick dessen, was im zweyten Theile dieses Werkes streng bewiesen werden soll, ist der Gegenstand dessen, was uns noch in diesem zu sagen übrig bleibt.

121. Es scheint fürs erste, daß wir das Gesetz des Gleichgewichts bey dem Hebel sehr leicht allgemeiner anwenden, und es auch auf zwey

Kräfte werden ausdehnen können, die sich, vermittelst irgend einer andern Maschiene, im Gleichgewicht halten.

Denken wir uns wirklich irgend eine Maschiene ohne Feder (Fig. 13.), an welcher zwey Kräfte P, Q, angebracht seyn mögen; wir wollen annehmen, daß diese Maschiene in Bewegung gesetzt worden sey, und auf irgend eine Weise durch eine Stellung hindurch komme, wo die Kräfte P, Q sich wechselseitig aufheben, oder sich wechselseitig im Gleichgewicht erhalten würden, wenn der Maschiene nicht im Voraus eine Bewegung mitgetheilt worden wäre.

Es seyen $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ die von den Puncten, an welchen diese Kräfte P, Q angebracht worden sind, vermöge dieser mitgetheilten Bewegung durchlaufenen Räume; diese Räume werden folglich die Geschwindigkeiten derselben Puncte vorstellen, und wenn man von den Puncten P', Q', die Perpendikel $\overline{P'm}$, $\overline{Q'n}$, auf die Richtungen $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ dieser Kräfte fällt, so werden die Linien $\overline{Pm}$, $\overline{Qn}$ augenscheinlich die Geschwindigkeiten derselben Puncte, nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt, seyn.

Jetzt wollen wir für diese beyden Kräfte durch Rollen A und B zwey parallele Kräfte substituiren, z. B. zwey Gewichte p, q, die diesen

Kräften beyderseits gleich sind; das heißt, wir nehmen erst auf den Richtungen dieser Kräfte bestimmte Theile $\overline{PA}$, $\overline{QB}$, an; an den Puncten A und B befestigen wir Rollen, über welche wir die Seile P A p, Q B q gehen lassen wollen, wovon die Stücke $\overline{Ap}$, $\overline{Bq}$ vertikal stehen; wir hängen nun weiter an den Puncten p, q Gewichte auf, die beyderseits den Kräften P, Q gleich sind, und denken uns nun diese leztern Kräfte weg. Es ist klar, daß das Gleichgewicht nicht gestört worden ist, das heißt, daß zwischen den beyden Gewichten p, q, eben so, wie vorher zwischen P, Q, Gleichgewicht Statt finden wird, und daß die Maschiene sich bloß vermöge der vorhererlangten Bewegung bewegen wird.

Ferner ist es augenscheinlich, daß die binnen der unendlich kurzen Zeit, während welcher die Puncte, an denen die Kräfte P, Q angebracht waren, respective die Räume $\overline{PP^{I}}$, $\overline{QQ^{I}}$ beschrieben, nun zurückgelegten Räume $\overline{pp^{I}}$, $\overline{qq^{I}}$ beyderseits $= \overline{Pm}$, $\overline{Qn}$, das heißt, den Geschwindigkeiten dieser Puncte P, Q, nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt, gleich seyn werden; denn wenn das Seil nicht gedehnt wird, so hat man $PAp = P^{I}Ap^{I}$. Wenn man auf der einen, wie auf der andern Seite, $\overline{mAp}$ abzieht, so wird man haben

$$\overline{Pm} = \overline{pp^{I}} + (\overline{P^{I}A} - \overline{mA});$$

aber $\overline{P^{I}A}$ und $\overline{mA}$ sind nur um eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschieden, weil nach der Voraussetzung $\overline{P^{I}m}$ perpendikulär auf $\overline{PA}$ ist, folglich reducirt sich das zweyte Glied der vorhergehenden Gleichung auf $\overline{p\,p^{I}}$; folglich ist $\overline{Pm} = \overline{p\,p^{I}}$, und aus dem nämlichen Grunde $\overline{Qn} = \overline{q\,q^{I}}$, das heißt, $\overline{p\,p^{I}}$ und $\overline{q\,q^{I}}$ sind die Geschwindigkeiten der Kräfte P, Q, geschätzt nach der Richtung dieser Kräfte.

Dieß angenommen, so wollen wir die geraden Linien $\overline{p\,q}$, $\overline{p^{I}q^{I}}$ ziehen, und K mag der Durchschnittspunct dieser geraden Linien seyn. Gesetzt, die Gewichte p, q seyen an den Enden dieser geraden Linie befestiget, so ist einleuchtend, daß man diese Linie wie einen Hebel betrachten kann, der in K seinen fixen Punct hat, und der während der kleinen Bewegung, die ihn nach $\overline{p^{I}q^{I}}$ bringt, nichts an der Wechselwirkung der Körper p und q verändern kann. Hieraus folgt, daß es gleichgültig ist, ob diese Körper an der erstern Maschiene, oder an dem Hebel befestiget sind, und endlich, daß man eine an die Stelle der andern setzen kann, ohne das Gleichgewicht zwischen den Körpern p, q zu stören.

Nun hat man, nach dem Gesetz des Gleichgewichtes bey dem Hebel, $p : q :: \overline{Kq} : \overline{Kp}$;

oder, weil die Radien $\overline{Kp}$, $\overline{Kq}$ den unendlich kleinen Bögen $\overline{pp^1}$, $\overline{qq^1}$ proportionirt sind, $p:q::\overline{qq^1}:\overline{pp^1}$. Folglich, da nach der Voraussetzung $p = P$, $q = Q$; und da es überdieß bewiesen worden ist, daß $\overline{pp^1} = \overline{Pm}$, $\overline{qq^1} = \overline{Qn}$, so wird die Proportion werden, $P:Q::\overline{Qn}:\overline{Pm}$; das heißt, die Kräfte P, Q, stehen im wechselseitigen Verhältnisse ihrer Geschwindigkeiten, nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt, die Maschiene, an welcher sie angebracht sind, mag beschaffen seyn, wie sie will.

Auf diesen Satz kommt das hinaus, was man das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder das Galileische Prinzip nach dem Namen seines berühmten Erfinders, nennt.

122. Dieses Prinzip war sehr schön, nur daß man es anfangs nicht durch die Untersuchung aller der einzelnen Fälle, die sich darbieten könnten, zu bestätigen, und nachher es nicht allgemeiner zu machen, und es auf eine jede beliebige Anzahl von gleichzeitig an einer und derselben Maschiene angebrachten Kräften auszudehnen suchte.

Fürs erste konnte man nun wohl leicht einsehen, daß die Erfahrung dieses Prinzip in allen sogenannten einfachen Maschienen bestätigte, nämlich beym Hebezeuge, beym Hebel, bey der Rolle, bey der Haspel, bey der schiefen Ebne, bey der Schraube und dem Keil; und das plausible Raisonnement, nach dem man durch andere Betrachtungen das Gesetz des Gleichgewichts für jede derselben findet, haben diese Resultate der Erfahrung bestätiget.

Hieraus war es in der Folge leicht zu schliessen, daß dasselbe Gesetz auf jede zusammengesetzte Maschiene müßte angewendet werden können, bey welcher bloß zwey Kräfte gebraucht würden, weil es darunter keine giebt, welche man nicht als eine Vereinigung von mehreren einfachen Maschienen ansehen könnte, vermittelst welcher sich die Wirkung der ersten Kraft, von einer zur andern, bis zur letzten fortpflanzt.

Es ist folglich bloß noch zu wissen übrig, wie dasselbe Prinzip auf jedes beliebige System von gleichzeitig an einer und derselben Maschiene angebrachten Kräften angewendet werden könne.

Denken wir uns verschiedene beliebige Kräfte, P, Q, R, S u. s. w. (Fig. 14.) an irgend einer Maschiene angebracht, und setzen wir, wie oben, vermittelst einer Rolle für jede dieser Kräfte ein ihr gleiches Gewicht.

Es seyen p, q, r, s u. s. w. diese Gewichte; ziehen wir zwischen je zwey von ihnen, wie

p, q, eine gerade Linie $\overline{pq}$, die durch die Bewegung der Anbringungspuncte der Kräfte P, Q, zu $\overline{pq'}$ wird, so ist aus dem, was oben für den Fall, wo bloß zwey Kräfte in dem System waren, gesagt worden ist, klar, daß $\overline{pp'}$, $\overline{qq'}$, die respectiven Geschwindigkeiten der Puncte P, Q seyn werden, geschätzt nach der Richtung dieser da angebrachten und ebenfalls durch P und Q bezeichneten Kräfte.

Folglich, wenn man annimmt, daß K der Durchschnittspunct von $\overline{pq}$, $\overline{p'q'}$, und die Gewichte p, q an den Enden dieser geraden Linie $\overline{pq}$ befestiget sind, so wird man sie als einen Hebel, der sich frey um den festen Punct K herumdreht, und der auf keine Weise die Wechselwirkung der Gewichte p und q hindert, ansehen können.

Ferner, weil wir Herr sind über die Stellung der für jede Kraft angebrachten Rollen, so ist es einleuchtend, daß, wenn wir, wo es nöthig ist, für jede Kraft zwey Rollen anbringen, wir es machen können, daß die für diese Kräfte substituirten Gewichte, nicht allein in eine und ebendieselbe Fläche und in eine und ebendieselbe gerade Linie, sondern auch in jeden beliebigen Punct dieser geraden Linie fallen müssen.

Denken wir uns nun wirklich alle diese Gewichte in die gerade Linie $\overline{p\,q}$, und in die Puncte dieses Hebels gebracht, deren bestimmte Bewegung, wie wir oben an den Bewegungen der Körper p, q, gesehen haben, mit denen der neuen Gewichte zusammentrifft; das heißt z. B. so daß r in den Punct des Hebels fällt, der die nämliche Geschwindigkeit, und nach derselben Richtung hat, wie das Gewicht r selbst; so ist es einleuchtend, daß man sich so alle die Gewichte p, q, r, s an einem und ebendemselben Hebel, dessen fixer Punct in K ist, angebracht denken könne, ohne daß die Wechselwirkung zwischen diesen Gewichten gestört werde. Es wird folglich gleichgültig seyn, ob diese Gewichte an der gegebenen Maschiene, oder an den Hebel befestigt bleiben, und das Gleichgewicht wird zwischen ihnen eben so Statt finden, als zwischen den Kräften P, Q, R, S rc. an deren Stelle sie getreten sind.

Ferner sind nach dem, was für den Fall, wo bloß zwey Kräfte in dem Systeme sind, gesagt worden ist, die Geschwindigkeiten der Gewichte p, q, r, s rc. gleich den Geschwindigkeiten der Puncte P, Q, R, S u. s. w. wo die Kräfte angebracht worden sind, geschätzt nach der Richtung der gleichnamigen Kräfte; folglich werden, da man voraussetzte, daß die Gewichte in einer unendlich kurzen Zeit die kleinen Räume $\overline{p\,p'}$, $\overline{q\,q'}$, $\overline{r\,r'}$, $\overline{s\,s'}$ u. s. w. durchliefen, diese kleinen Räume, die Geschwindigkeiten der Kräfte P, Q, R, S ꝛc., nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt, ausdrücken, wobey man diejenigen von diesen Räumen, die von unten nach oben zu gerichtet sind, als negativ nimmt; das heißt, wenn man P^1, Q^1, R^1, S^1 ꝛc. die diesen Kräften zugehörigen Geschwindigkeiten, wirklich nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt, nennt, so hat man

$$P^1 = \overline{p\,p^1},\quad Q^1 = -\,\overline{q\,q^1},\quad R^1 = \overline{r\,r^1},$$
$$S^1 = -\,\overline{s\,s^1} \text{ etc.}$$

Aber nach dem Gesetz des Gleichgewichts bey dem Hebel, an welchem mehrere Kräfte gleichzeitig angebracht werden, haben wir:

$$p \cdot \overline{p\,p^1} - q \cdot \overline{q\,q^1} + r \cdot \overline{r\,r^1} - s \cdot \overline{s\,s^1} = 0,$$
oder $P \cdot P^1 + Q \cdot Q^1 + R \cdot R^1 + S \cdot S^1 + \text{etc.} = 0.$

Das heißt, die Maschiene, an welcher die Kräfte P, Q, R, S etc. angebracht sind, die sich im Moment, wo die Maschiene durch eine gegebene Stellung geht, gegenseitig vernichten, sey welche sie wolle, so wird die Summe der Producte aus jeder dieser Kräfte in ihre Geschwindigkeit, geschätzt nach der Richtung dieser Kraft, gleich Null seyn, und dieß ist das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten auf jedes beliebige System von gleichzeitig an einer und ebenderselben Maschiene angebrachten Kräften, ausgedehnt. In der That also nennt man virtuelle Geschwindigkeiten diejenigen, welche die Puncte, in denen die Kräfte angebracht sind, annehmen, wenn man das bestehende Gleichgewicht unendlich wenig stört. Nun ist aber dieser Fall in demjenigen mit eingeschlossen, welchen wir eben betrachtet haben, weil wir voraussetzten, daß die Maschiene eine jede Bewegung, selbst eine endliche, haben könne. Lagrange geht in seiner Mécanique analytique von dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen bloß zwey Kräften, als von einer anerkannten Grundwahrheit aus, und er geht hernach weiter in den Gegenstand ein, indem er eben so, wie wir oben gethan haben, aber auf dem rein analytischen Wege, welchen er in diesem schönen Werke eingeschlagen hat, dieses Prinzip auf ein jedes beliebige System von gleichzeitig wirkenden Kräften ausdehnt.

123. Gesetzt, alle die gegebenen Kräfte P, Q, R, S etc. seyen selbst Gewichte, so wird jedes dieser Gewichte = dem Product aus der Masse des Körpers in die Schwerkraft seyn; folglich können wir, da die Schwere eine beschleunigende, allen gemeinschaftliche und vertikal wirkende Kraft ist, aus dem vorhergehenden Prinzip schließen, daß bey jeder Maschiene mit Gewichten, die sich im Gleichgewicht befinden, die Summe der Producte aus jeder Masse in ihre virtuelle Geschwindigkeit, von oben nach unten in der vertikalen Rich-

tung geschätzt, gleich Null ist. Aber man weiß (116.), daß die Geschwindigkeit des Schwerpunctes, von oben nach unten, diese nämliche Summe dividirt durch die der Massen, ist; folglich ist im Fall des Gleichgewichts, bey einer jeden Maschiene mit Gewichten, die virtuelle Geschwindigkeit des Schwerpunctes, nach vertikaler Richtung geschätzt, gleich o. Woraus das berühmte von Toricelli, einem Schüler des Galilei, aufgestellte Prinzip folgt, daß bey jeder Maschiene mit Gewichten, die im Gleichgewicht sind, der Schwerpunct in dem möglichst tiefsten Puncte liegt, und allerdings, wenn der Schwerpunct schon in dem möglichst tiefsten Puncte liegt, so kann er nicht weiter herabsteigen; und da es der Natur schwerer Körper widerstreitet, daß sie emporsteigen, so wird seine Geschwindigkeit Null seyn, dem, oben vorgetragenen Grundsatze gemäß.

124. Da dieser schöne Satz, wie wir eben gehört haben, aus den oben, als Grundgesetze des Gleichgewichts und der Bewegung angenommenen Hypothesen hergeleitet ist, so giebt er uns ein vortreffliches Mittel an die Hand, die völlige Richtigkeit dieser Hypothesen darzuthun; denn obgleich diese Wahrheit streng zu beweisen schwer seyn mag, so ist sie demungeachtet so beschaffen, daß man ihre Richtigkeit leicht fühlt, und daß ihr jedermann beystimmt, so wie sie nur ausgesprochen wird, um der täglichen Erfahrungen willen, die sie bestätigen. In der That, wir sehen z. B. daß ste-

hendes Wasser sich jederzeit wagerecht hält, welches augenscheinlich nicht Statt haben würde, wenn sein Schwerpunct nicht in dem möglichst tiefsten Puncte läge. Wir sehen, daß ein einzelner Körper, auf eine gekrümmte Fläche gestellt, den tiefsten Punct dieser Fläche sucht, und daß er, wenn er dorthin gekommen ist, daselbst bleibt; da wir nun wissen, daß man in dem Fall des Gleichgewichts eines Systems von Körpern alle seine Theile, als bloß eine, im Schwerpuncte, so zu sagen, vereinigte Masse ansehen kann; so schliessen wir natürlich, daß im Fall des Gleichgewichts, der allgemeine Schwerpunct sich in dem möglichst tiefsten Puncte befinden muß, wie auch die Maschiene beschaffen seyn mag, auf welcher die verschiedenen Puncte des Systems angebracht worden sind.

125. Je aufmerksamer man das Prinzip untersucht, desto mehr wird man von seiner Wichtigkeit und Richtigkeit überzeugt; denn folgendes Raisonnement, welches sich geradezu, und ohne erst auf die Grundprinzipien zurückzugehen, über diesen Gegenstand darbietet, hat gewiß einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit.

Denken wir uns eine Maschiene, an welcher keine andern Kräfte, als Gewichte, angebracht sind; ich setze übrigens voraus, daß sie von einer Gestalt und einer Zusammensetzung seyn kann, von welcher sie will, aber ohne daß man ihr eine Bewegung mitgetheilt hat. Dieß angenommen, so ist es einleuchtend, daß, wie auch die Stellung der Körper des Systems seyn mag, wenn Gleichgewicht statt findet, die Summe der Widerstrebungen der fixen Puncte, oder der Hindernisse, von welcher Art sie seyn mögen, nach der vertikalen Richtung, der Schwere entgegengesetzt, geschätzt, dem Totalgewicht des Systems gleich seyn wird. Aber, wenn irgend eine Bewegung entsteht, so wird ein Theil der Schwere dazu angewandt, um sie hervorzubringen, und die fixen Puncte werden bloß noch mit dem Ueberschuß belastet seyn können; folglich wird in diesem Falle die Summe der vertikalen Widerstände der festen Gewichte im ersten Augenblick geringer seyn, als das Totalgewicht des Systems; folglich wird aus den beyden mit einander verbundenen Kräften, nämlich dem Totalgewicht des Systems und der vertikalen Last der fixen Puncte, eine einzige, ihrer Differenz gleiche Kraft hervorgehen, die das System von oben nach unten herabbringen wird, als wenn es frey wäre; mithin wird der Schwerpunct nothwendig mit einer Geschwindigkeit niedersteigen, die dieser Differenz, dividirt durch die Totalmasse dieses Systems, gleich ist; und wenn ~~also~~ der Schwerpunct nicht herabsteigt, so muß nothwendig Gleichgewicht Statt finden; folglich im Allgemeinen:

Um sich zu überzeugen, daß mehrere, an irgend einer Maschiene angebrachte Gewichte, sich gegenseitig ins Gleichgewicht setzen müssen, reicht es hin, zu beweisen, daß, wenn man die Maschiene sich selbst überläßt, der Schwerpunct des Systems nicht herabsteigen kann.

126. Die unmittelbare Folge aus diesem, ohne Ausnahme wahren Prinzip ist, daß, wenn der Schwerpunct dieses Systems in dem möglichst tiefsten Puncte liegt, nothwendig Gleichgewicht Statt finden muß; denn nach dem vorigen Satze ist es zum Beweis hinreichend, wenn man zeigt, daß der Schwerpunct nicht herabsteigen kann; wie soll er aber herabsteigen, da er nach der Annahme in dem möglichst tiefsten Puncte liegt?

127. Man kann die Bemerkung machen, daß es nicht richtig seyn würde, wenn man sagte, daß umgekehrt allemal, wenn Gleichgewicht Statt findet, der Schwerpunct nothwendig in dem möglichst tiefsten Puncte sey; denn es könnte sich ereignen, daß er im Gegentheil im höchsten Puncte läge, oder auch, daß er sich weder in dem höchsten, noch in dem niedrigsten Puncte befände. Dieß sind, wie bekannt, sehr gewöhnliche Ausnahmen in der Theorie der Maximums und Minimums. Aber das Prinzip, wie wir es oben dargestellt haben, hat den Vortheil, daß es keiner Ausnahme unterworfen ist.

128. Dieses Prinzip bietet sich gewissermaßen schon von selbst dem Geiste dar, man muß es

aber als sehr wichtig ansehen, da man auch bey flüchtigem Nachdenken einsieht, daß es das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ganz deutlich anzeigt, welches man mit Grunde als Fundamentalprinzip ansieht, und welches gewissermaßen in sich allein alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung enthält. Nun ist aber dieß Prinzip kein anderes, als das von dem Schwerpuncte, der bey Maschienen mit Gewichten in dem möglichst niedrigsten Puncte liegt, nur etwas modifizirt. Dieses letztere Prinzip ist also sehr schätzbar, da es auf den Weg der Untersuchungen leitet, die gemacht werden müssen, um das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden und zu bestätigen, und da man in der That, um jede beliebige Maschiene auf eine Maschiene mit Gewichten zurückzubringen, nichts weiter zu thun hat, als daß man mittelst einer Rolle an die Stelle jeder andern Kraft, ein Gewicht setzt. Der Schwerpunct wird dann in dem möglichst niedrigsten Puncte seyn, oder genauer, er wird in einer solchen Lage seyn, daß, man drücke der Maschiene eine unendlich kleine Bewegung ein, welche man will, der Schwerpunct dennoch nicht herabsteigen wird. Folglich wird die Summe der Producte aus jedem Gewichte, in den vertikalen Weg, den es beschreibt, gleich Null seyn. Aber es ist offenbar (122.), daß jedes dieser Producte gleich ist dem der Kraft, deren Stelle dieses Gewicht einnimmt, multiplicirt durch ihre Geschwindigkeit, geschätzt nach der Richtung dieser Kraft. Folglich ist die

Summe der Producte von allen gegebenen Kräften, jede multiplicirt durch ihre, nach der Richtung dieser Kraft geschätzte Geschwindigkeit, gleich Null. Dieß ist genau das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, angewendet auf eine jede beliebige Anzahl von Kräften.

129. Folglich, wenn sich mehrere Massen M, jede in Bewegung gesetzt von einer beschleunigenden Kraft p, um irgend eine Maschiene, ohne Getriebe, herum gegenseitig im Gleichgewicht halten, so sey V die Geschwindigkeit von M, vermöge der erhaltenen Bewegung, z der zwischen den Richtungen von V und p eingeschloßne Winkel; so wird die bewegende Kraft p M jede von denen, die an der Maschiene angebracht sind, vorstellen; V cos. z ihre, nach der Richtung dieser Kraft geschätzte Geschwindigkeit; und man würde folglich, nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten haben, $\int p M V \cos. z = 0$, in welcher Formel das Zeichen $\int$ das Integral, oder die Summe von bedeutet.

130. Diese Formel ist nicht allein auf die bewegenden Kräfte, oder die Kräfte des Drucks anwendbar, sondern sie kann auf gleiche Weise auch auf die Kräfte des Stoßes angewendet werden, weil beyde denselben Gesetzen unterworfen sind: und hieraus können die allgemeinen Gesetze des Stoßes der Körper hergeleitet werden.

Wir wollen wirklich einmal annehmen, daß mehrere harte Körper im Begriff wären, sich auf irgend eine Weise zu stoßen; es sey M die Masse jedes derselben, W seine Geschwindigkeit vor dem Stoße, V seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, U die Geschwindigkeit, welche er durch den Stoß verliert, und z der zwischen V und U liegende Winkel.

Die Kräfte, welche sich aufheben, und die in der vorhergehenden Formel durch $p\,M$ ausgedrückt waren, heißen in diesem Falle $M\,U$, folglich wird die Formel für das ganze System $\int M\,U\,V \cos. z = 0$ werden.

131. Jetzt, da W die resultirende von V und U ist, so werden diese drey Geschwindigkeiten durch die drey Seiten eines Triangels, dessen W gegenüberstehender Winkel das Complement zu z ist, ausgedrückt werden; folglich wird man haben $W^2 = V^2 + U^2 + 2\,V\,U \cos. z$. Und wenn man alles mit M multiplicirt und dann integrirt, so erhält man

$$\int M\,W^2 = \int M\,V^2 + \int M\,U^2 + 2 \int M\,U\,V \cos. z.$$

Aber man hat eben gesehen, daß das letzte Glied dieser Gleichung Null ist, folglich reducirt sie sich auf

$$\int M\,W^2 = \int M\,V^2 + \int M\,U^2.$$

Eine Eigenschaft, die jedem System von harten Körpern zukommen muß, sie mögen sich einander nun unmittelbar, oder vermittelst einer Maschiene ohne Getriebe, stoßen.

132. Diese letzte Formel giebt uns neue Mittel an die Hand, die Hypothesen, woraus wir sie gezogen haben, zu bestätigen; denn erstlich, wenn wir sie auf den geraden Stoß zweyer harter Körper anwenden, so werden wir die Resultate in Uebereinstimmung mit den Thatsachen finden, die durch ein auf diesen besondern Fall am directesten anwendbares Raisonnement, völlig bestätigt werden.

Wenn wir nun ferner annehmen, daß von irgend einem System harter Körper die Rede sey, dessen Bewegung sich in unmerkbaren Graden verändert, so sehen wir, daß, da U alsdann eine unendlich kleine Größe ist, U^2 eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung ist, woraus folgt, daß die Formel sich auf $\int M W^2 = \int M V^2$ reducirt, das heißt, daß alsdann die Summe der lebendigen Kräfte nicht verändert wird. Dieß ist das berühmte von Huygens entdeckte Prinzip, welches die Erscheinungen immer lange vorher bewiesen haben, ehe man die allgemeine Demonstration dafür hatte.

133. Endlich, wenn man bemerkt, daß bey dem Stoße harter Körper, die durch den Stoß

vernichtete Größe der Bewegung M U, durch die Federkraft nach der entgegengesetzten Richtung wieder ersetzt wird, wenn die Körper vollkommen elastisch sind, so sieht man, daß in diesem letztern Fall $\int M V^2$ größer, als im erstern, seyn muß, $\int M U^2$, welches im erstern Fall aufgehoben war, in dem zweyten aber wieder zum Vorschein kommt, eben so groß; das heißt, anstatt daß man bey harten Körpern hat

$$\int M V^2 = \int M W^2 - \int M U^2,$$

so muß man nun für die elastischen Körper haben,

$$\int M V^2 = \int M W^2.$$

Folglich muß es bey vollkommen elastischen Körpern keine Verminderung von lebendigen Kräften geben, wie viel auch übrigens das System Körper haben mag. Nun kennt man auch aus der Analogie, nach dem, was zwischen zwey Körpern bloß Statt findet, diese Thatsache schon seit langer Zeit, ob man gleich keinen allgemeinen Beweis dafür gehabt hat.

134. Diese, dem Anscheine nach so verschiedenen, und doch mit den aufgestellten Hypothesen völlig übereinstimmenden Resultate müssen uns ein so inniges Vertrauen auf die Richtigkeit dieser Hypothesen einflößen, als es bey einer Wissenschaft, die nothwendig zum Theil auf die Erfah-

rung gegründet seyn muß, zu hoffen möglich ist. Wir wollen daher von jetzt an diese Hypothesen, und die Vernunftschlüsse, worauf sie sich stützen, als gegenseitig durch einander bestätigt, und als geschickt, der Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung zu Grundlagen zu dienen, ansehen; und indem wir uns mit allen Mathematikern auf diese Grundlagen stützen, werden wir die Folgerungen streng zu erweisen suchen, von denen wir eben eine Uebersicht gegeben haben, und daraus die analytische Formeln des Gleichgewichts und der Bewegung ableiten.

Zweyter Theil.

Entwickelung der vorher als Naturgesetze aufgestellten Hypothesen. Ausdruck dieser Gesetze durch algebraische Formeln. Allgemeine Betrachtungen über die bewegenden Kräfte an den Maschienen.

135. Die vorher dargestellten Begriffe grenzten zu nahe an die ursprünglichen Ideen, und an die Empfindungen, mit denen sie gewissermaaßen eins waren, als daß es möglich gewesen wäre, auf sie allein, und ohne Zuthun der Erfahrung, die Hauptgrundsätze des Gleichgewichts und der Bewegung zu stützen; oder vielmehr, diese Begriffe selbst waren nur die ersten Schritte zu Erfahrungen, die durch neue Thatsachen, und durch verschiedene Zusammenstellungen entwickelt werden mußten, um ihre wahre Bedeutung bestimmen, das Schwankende von ihnen entfernen, und endlich, den Grundsätzen, die sich aus ihnen ergeben, die Bündigkeit geben zu können, die sie bedürfen, um die Anwendung des Kalkuls zuzulassen, und unter

die Zahl der mathematischen Wahrheiten gerechnet werden zu können. Jetzt wollen wir versuchen, diese Grundsätze wirklich in algebraische Formeln aufzulösen. Eine Uebersicht dieser Resultate haben wir schon zu Ende des ersten Theils gegeben. Hier kömmt es bloß darauf an, diese Resultate streng durch bloßes Raisonnement zu beweisen, indem wir von den obenfestgesetzten Hypothesen ausgehen und daraus die allgemeinsten Folgerungen herleiten. Wir werden mit dem Stoße der Körper, er mag unmittelbar, oder vermittelst einer Maschiene bewirkt werden, anfangen. Wir werden daraus hernach, als einen besondern Fall, die Gesetze der Bewegung eines Systems von Körpern, wenn die Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, herleiten. Diese Theorie wird folglich alle Grundprinzipien über die Mittheilung der Bewegung, und folglich die der Mechanik selbst umfassen. Denn man betrachtet, wie schon oben bemerkt worden ist, in der Mechanik keine Kraft, die nicht wirklich in den Körpern befindlich, das heißt, die nicht wirklich eine schon hervorgebrachte Bewegungsgröße wäre.

Erklärungen.

136. **Jede Bewegung, die, einem Systeme von Körpern mitgetheilt, nichts an der Intensität der Wirkung ändert, welche dieselben gegen einan-**

der ausüben, oder auch ausüben könnten, wenn man ihnen noch andere Bewegungen mittheilte, werden wir geometrische Bewegung nennen.

Die Geschwindigkeit, welche alsdann jeder bewegliche Körper annimmt, wird seine geometrische Geschwindigkeit genannt werden.

So z. B. wenn man zwey Körpern, die im Begriff sind, sich zu stoßen, eine gemeinschaftliche Bewegung mittheilt, so ist es klar, daß die Intensität des Stoßes, der eben Statt finden soll, um nichts verändert wird; denn nach (73. fünfte Hypothese) wirken diese beyden Körper nicht vermöge ihrer absoluten Geschwindigkeiten, sondern bloß vermöge ihrer relativen Geschwindigkeit auf einander. Nun aber verändert die gemeinschaftliche, ihnen mitgetheilte Bewegung diese relative Geschwindigkeit nicht, sondern nur die absoluten Geschwindigkeiten. Folglich bleibt die Intensität des Stoßes dieselbe, also gehört diese gemeinschaftliche, dem ganzen Systeme mitgetheilte Bewegung, zu denjenigen, die ich eben geometrische Bewegungen genannt habe.

137. Dasselbe würde Statt finden, wenn die beyden Körper, anstatt unmittelbar auf einander durch Stoß oder Druck zu wirken, sich durch einen Stab stießen, oder an einem Faden zögen,

Jede Bewegung, die diesen beyden Körpern gemein wäre, würde nichts an ihrer relativen Geschwindigkeit, und folglich eben so wenig an ihrer wechselseitigen Wirkung auf einander ändern; sie würde folglich eine geometrische Bewegung seyn.

Dasselbe würde auch dann noch der Fall seyn, wenn anstatt bloß zweyer Körper, von irgend einem Systeme von Körpern die Rede wäre, welches ganz frey im Raume stände, das heißt, welches durch keinen fixen Punct, durch keinen Widerstand beschränkt würde, und dessen Theile insgesammt von einer gemeinschaftlichen Bewegung fortgetrieben würden. Diese gemeinschaftliche Bewegung würde die relativen Geschwindigkeiten der Körper, die zu dem zusammengesetzten Systeme gehörten, um nichts verändern, und folglich auch nicht die Wirkung, welche sie auf einander ausüben könnten; und diese gemeinschaftliche Bewegung würde folglich eine geometrische Bewegung seyn.

138. Endlich würde nicht bloß die durch die Körper des Systems auf einander ausgeübte Wirkung durch diese gemeinschaftliche Bewegung nicht verändert werden, sondern, jede andere Wirkung, die unter ihnen Statt haben könnte, würde gleichfalls unabhängig von dieser Bewegung bleiben; denn diese Wirkung, welche sie auch seyn möchte, würde jederzeit nur von den relativen Geschwindigkeiten abhängen. Diese relativen Geschwindigkeiten

werden aber durch die gemeinschaftliche Bewegung nicht verändert. Dieß ist übrigens der Grund, warum es in der Erklärung heißt, die Wirkung, die die Körper gegen einander ausüben, oder ausüben könnten. Es ist nämlich nicht bloß die Rede von wirklich ausgeübter Wirkung, sondern auch von allen denen, die, vermöge der Stellung der Theile des Systems gegen einander ausgeübt werden könnten, wenn man ihnen andere relative Geschwindigkeiten, als die, welche sie haben, mittheilen wollte. Folglich paßt die Erklärung, die Körper mögen wirklich auf einander einwirken, oder bloß ruhig neben einander seyn.

139. Die allen Theilen eines Systems von Körpern gemeinschaftlichen Bewegungen sind nicht die einzigen, auf welche, nach der vorhergehenden Erklärung, der Nahme geometrische Bewegungen angewandt werden kann. Es giebt eine unendliche Menge anderer, welche die wechselseitige Wirkung, welche die Körper auf einander ausüben, oder würden ausüben können, eben so wenig verändern.

Es seyen z. B. zwey Körper A, B, (Fig. 15.) an einen, um den fixen Punct C beweglichen Hebel befestigt; wenn man den Körpern A B zu gleicher Zeit die Kreisgeschwindigkeiten $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ perpendikulär und proportionirt den ihnen gehörigen Hebelarmen $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ in derselben Fläche und in entgegengesetzter Richtung mittheilt, so ist es offenbar, daß diese Geschwindigkeiten sich nicht gegenseitig hindern werden, daß sie folglich die Wirkung, die diese beyden Körper außerdem wirklich auf einander ausüben, oder ausüben könnten, z. B. vermöge der Schwere, oder auf eine andere Weise, weder zu vermehren, noch zu vermindern streben würden. Folglich gehört diese kreisförmige Bewegung des Hebels zu denjenigen, die ich **geometrische Bewegungen** genannt habe.

140. Es seyen A und B zwey Körper, welche an den Enden eines Seiles, das über eine feste Rolle, (Fig. 16.) und zu beyden Seiten vertikal herunter geht. Man theile dem Körper A z. B. irgend eine Geschwindigkeit von oben nach unten, und dem Körper B eine gleiche Geschwindigkeit von unten nach oben zu mit, so ist es deutlich, daß die Wirkung, welche durch das Seil von einem Körper auf den andern übergetragen wird, mag seyn, oder seyn können, welche sie will, diese Wirkung durch die den Körpern A und B mitgetheilten Geschwindigkeiten gar nicht verändert werden wird. Folglich wird diese, dem System mitgetheilte Bewegung zu denen gehören, die ich **geometrische Bewegungen** genannt habe.

141. A und B seyen zwey bewegliche an den Enden eines Fadens, der, (Fig. 17.) durch einen

verschiebbaren Ring C geht, befestigte Körper. Man theile diesen Körpern solche Geschwindigkeiten mit, daß, wenn sie von diesen Geschwindigkeiten allein getrieben würden, sie sich nach beliebigen Richtungen $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ bewegen müßten, so daß man nach Verlauf einer unendlich kurzen Zeit $aCb = ACB$ hätte, so wird die Bewegung eine geometrische seyn; denn da eine solche Bewegung für sich allein den Faden weder zu verlängern noch zu verkürzen strebt, so kann sich auch die Spannung desselben weder vermehren noch vermindern; und sie verändert folglich die Wirkung, welche die Körper außerdem auf einander ausüben könnten, um nichts. Folglich gehört sie zu denen, die ich *geometrische Bewegungen* genannt habe.

142. Gesetzt, man habe eine vertikale Schraube mit ihrer Schraubenmutter; man drehe diese Schraubenmutter um ein Gewinde der Schraube gleichförmig aufwärts; während daß man eben so gleichförmig das Querholz der Schraube eine ganze Kreisbewegung machen läßt. Diese beyden Bewegungen werden so mit einander übereinstimmen, daß sie einander nicht im Wege seyn können; folglich werden sie auf keine Weise die Wirkung verändern, die außerdem die Schraubenmutter, und der bewegliche Körper, den man am Ende des Querholzes befestiget hat, gegen einander ausüben könnten; folglich gehört die dem System

mitgetheilte Bewegung zu denjenigen, die ich geometrische Bewegungen genannt habe.

143. Denken wir uns endlich, daß an allen Winkeln eines ebenen oder unebenen Polygons A BCDE (Fig. 18.) die Körper A, B, C, D, E, angebracht, und durch Stäbe oder Fäden, welche durch die Seiten desselben Polygons vorgestellt werden, mit einander verbunden seyn, und sich um die Spitzen der Winkel, wie um ein Scharnier bewegen mögen. Giebt man diesem Polygon eine unendlich wenig von der erstern verschiedene Gestalt a b c d e, aber so, daß jede der Seiten genau ihre Länge behält, daß heißt, so, daß immer $\overline{AB} = \overline{ab}$, $\overline{BC} = \overline{bc}$ ꝛc. ist, so wird diese Bewegung eine geometrische seyn, das heißt, die durch $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ vorgestellten Geschwindigkeiten werden die wechselseitige Wirkung, welche die Körper des Systems sonst etwa gegenseitig auf einander ausüben könnten, um nichts verändern. Denn der Körper A z. B. kann bloß auf die Körper B, E, die an den ihm benachbarten Winkeln anliegen, unmittelbar wirken, und diese Wirkung auf jeden von ihnen, hängt bloß von ihrer relativen Geschwindigkeit ab. Aber weil nach der Hypothese $\overline{AB} = \overline{ab}$, $\overline{AE} = \overline{ae}$ war; so werden die relativen Geschwindigkeiten von A und B sich eben so wenig verändern, als die von A und E.

Folglich verändert sich die Wirkung von A auf B und die von A auf E eben so wenig; dasselbe ist bey allen je zwey und zwey verglichnen Körpern des Systems der Fall, wenn einer auf den andern eine unmittelbare Wirkung äußert. Was die respectiven Wirkungen, die nicht unmittelbar sind, wie die von A auf C, betrifft, so ist es unnütz, sie in Betracht zu ziehen. Denn die Wirkung von A auf C theilt sich jederzeit (73.) durch eine Reihe von unmittelbaren Wirkungen von einem dem andern mit, nämlich auf der einen Seite durch die unmittelbare Wirkung von A auf B, dann durch die von B auf C, und auf der andern Seite durch die unmittelbare Wirkung von A auf E, dann durch die von E auf D, und endlich durch die von E auf C. Die Wirkung von A auf C löst sich allezeit in eine Reihe von directen Wirkungen auf, und folglich ist es unnütz, wenn man sich von allen diesen erst Rechenschaft gegeben hat, die andern noch in besondere Erwägung zu ziehen. Folglich strebt die Bewegung, die aus der Veränderung der oben angezeigten Gestalt des Polygons entspringt, auf keine Weise, die Intensität der den Körpern des Systems zugehörigen Wirkungen weder zu vermehren, noch zu vermindern; folglich gehört diese Bewegung zu denjenigen, die ich geometrische Bewegungen genannt habe.

144. Durch diese Erörterungen, dünkt mich, muß die Beschaffenheit der Bewegungen, die ich

geometrische genannt habe, vollkommen verständlich geworden seyn. Sie ist ohne Unterschied auf alle Arten von Körpern, harte, weiche, elastische, feste und flüssige anwendbar. Diese Benennung, geometrische Bewegungen, gründet sich darauf, daß die Bewegungen, von denen die Rede ist, durchaus unabhängig von den Sätzen der Dynamik sind, da sie keinen Einfluß auf die Wirkung haben, welche zwischen den Körpern des Systems Statt finden kann. Denn wenn man sich ein System denkt, dessen Theile insgesammt in bloßer Ruhe, und nicht im Gleichgewicht sind, das heißt, bey welchem die an einander stoßenden Theile ohne Stoß, Druck, oder irgend eine Wirkung auf einander bloß neben einander liegen, dann wird, welche geometrische Bewegung man auch dem Systeme giebt, diese Bewegung nicht den geringsten Widerstand finden, weil, wenn irgend ein Theil dieser Bewegung vernichtet werden sollte, dieses nur dadurch geschehen könnte, daß die Körper sie nicht annehmen könnten, ohne sich einander im Wege zu seyn, das heißt, ohne irgend eine Wirkung auf einander auszuüben. Nun aber ist dieß gegen die Hypothese, weil es zur Natur der geometrischen Bewegungen gehört, keine Wirkung der Körper auf einander hervorzubringen. Diese Bewegungen sind folglich durchaus unabhängig von den Regeln der Dynamik. Sie hängen bloß von den Bedingungen der Verbindung unter den Theilen des Systems ab, und lassen sich folglich durch die bloße Geometrie bestimmen, und darum eben nenne ich sie geometrische Bewegungen.

145. Die Theorie der geometrischen Bewegungen ist sehr wichtig; sie ist, wie ich schon anderswo bemerkt habe, (Géométrie de position p. 337.) eine Wissenschaft, die gewissermaßen zwischen der reinen Geometrie und der Mechanik mitten inne liegt. Sie ist die Theorie der Bewegungen, die irgend ein System von Körpern annehmen kann, ohne daß sie sich gegenseitig im Wege sind, ohne daß sie weder eine Wirkung, noch irgend eine Gegenwirkung auf einander ausüben. Diese Wissenschaft ist niemals besonders behandelt worden; sie muß durchaus neugeschaffen werden, und verdient sowohl wegen ihrer Schönheit an sich selbst, als wegen ihres Nutzens alle Aufmerksamkeit der Gelehrten. Denn die großen analytischen Schwierigkeiten, die man in der Mechanik, und vorzüglich in der Hydraulik antrifft, kommen einzig und allein daher, daß die Theorie der geometrischen Bewegungen noch nicht ins Reine gebracht ist. Ich werde mich hier auf die Untersuchung der vorzüglichsten Eigenschaften dieser Bewegungen einschränken, in so weit sie mir zu meinem hier unternommenen Werke nöthig sind.

Erster Lehrsatz.

146. Wenn zwey Körper durch Stoß, Druck oder Zug auf einander wirken,

so geschieht dieß jederzeit entweder unmittelbar, wenn sie an einander gränzen, oder durch eine Reihe von andern an einander stoßenden, und zwischen den ersten liegenden Körpern, welche die Wirkung von einem zu dem andern durch eine Reihe unmittelbarer Wirkungen, zwischen diesen an einander stoßenden Mittelkörpern, von Glied zu Glied fortpflanzen.

Dieser Satz ist eine Folgerung aus der fünften Hypothese. Es scheint anfangs, daß das Aneinandergränzen zwischen zwey Körpern, die unmittelbar auf einander wirken, nicht immer erforderlich sey, weil keine dergleichen Communication vorhanden ist, wenn sich z. B. die beyden Körper an einem immateriellen Faden ziehen, oder durch einen immateriellen Stab fortstoßen, oder sich durch einen immateriellen Hebel das Gegengewicht halten, ob man gleich dann die Wirkung als unmittelbar zwischen diesen Körpern ansehen kann. Aber es ist zu bemerken, daß es in der Natur keinen immateriellen Faden, noch Stab, noch Hebel, noch irgend andere Maschienen geben kann. Alles dieß läßt sich bloß abstractionsweise denken, um die Erkenntniß von der besondern und wechselseitigen Wirkung der Körper zu erleichtern, die an diesen Maschienen angebracht sind, welche man dann als Theile von Materie betrachtet, die ihrer Kraft der Trägheit beraubt sind. Aber es ist Thatsache, daß es keine dergleichen Materie giebt, und daß uns die Natur bloß wirkliche Körper darbietet, die unmittelbar auf einander durch Stoß, Druck oder Zug wirken. Wenn zwey Körper von einander abgesondert, los sind, so können sie sich bloß stoßen oder drücken; wenn sie aneinander adhäriren, können sie sich nur drücken oder ziehen.

Wenn sie aber einander nicht berühren, so können sie nicht auf einander wirken, außer vermittelst zwischen ihnen liegender Körper, die ihnen von Punct zu Punct ihre Wirkungen auf einander überbringen, aber jederzeit nur vermittelst des unmittelbaren Stoßes, Druckes oder Zuges. Z. B. wenn M von N durch die Körper A, B, C, D, getrennt ist, so daß M an A stößt, A an B, B an C, C an N, so wird die Wirkung von M auf N zuerst von M nach A gehen. Dann von A nach B, dann von B nach C, und endlich von C nach N.

Mit einem Worte, die Erscheinungen der Natur bey dem Stoße bieten uns nur unmittelbare Wirkungen zwischen wirklichen und mit ihrer Trägheit begabten Körpern dar.

Daß man von der Kraft der Trägheit dieses oder jenen Theils der Materie abstrahirt, kann oft zur Untersuchung dieses oder jenes besondern Falls nützlich seyn, und ist es wirklich; aber bey der Untersuchung der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung ist es einfacher, die

Körper so zu betrachten, wie sie uns die Natur wirklich darbietet, weil es denn bloß eine Art von Dingen in dem System zu betrachten giebt.

Wenn die allgemeinen Gesetze einmal festgesetzt sind, so kann man ohne Schwierigkeit alle Abstractionen machen, welche man nur will. Man bedarf hierzu bloß der Voraussetzung, daß dieser oder jener Theil des Systems nur eine unendlich kleine Masse hat, oder von einer unendlich kleinen Dichtigkeit ist. Dann kommt man, indem man diese unendlich kleine Masse im Kalkul wegläßt, zu dem Resultate, das man bekommen haben würde wenn man die Maschiene gleich anfangs als immateriell gedacht hätte, und so erlangt die Untersuchung der Naturgesetze Einfachheit, indem sie zugleich ganz allgemein gemacht wird.

147. Eben so wenig giebt es absolut fixe Puncte in der Natur: aber da es welche giebt, deren Bewegung von uns nicht bemerkt und geschätzt werden kann, so sieht man sie wirklich als Null an, indem man entweder einige Körper des Systems als wirklich und absolut fix betrachtet, oder sich diese Körper als eine unendlich große Masse in einem endlichen Raume enthaltend, oder von einer unendlichen Dichtigkeit denkt.

Mithin ist der aufgestellte Satz streng wahr, und man muß bey dem Verfahren, das wir, um zu der Kenntniß der allgemeinen Gesetze über die

Verbindung der Bewegungen zu gelangen, befolgen werden, die Seile, die Hebel, und alle beliebige Maschienen, als wirkliche Körper betrachten, die in nichts von den gewöhnlichen Körpern verschieden sind.

Zweyter Lehrsatz.

148. **Wenn ein System von Körpern irgend eine geometrische Bewegung annimmt, dieses System mag nun vollkommen frey oder durch Widerstand beschränkt seyn, so ist es jederzeit möglich, ihm eine andere ebenfalls geometrische Bewegung zu geben, die der ersten durchaus gleich, und in der Richtung ihr im Diameter entgegengesetzt ist.**

Das heißt, die Geschwindigkeit, welche jeder Körper des Systems im ersten Augenblick haben wird, mag seyn, wie sie will, so wird es jederzeit möglich seyn, diese Geschwindigkeiten auf einmal aufzuheben, und durch andere Geschwindigkeiten zu ersetzen, die jeder von denen, welche man aufgehoben hat, gleich und gerade zu entgegengesetzt sind. Und was noch mehr ist, die neue Bewegung, die aus dieser Veränderung hervorgehen wird, wird eben sowohl geometrisch seyn, als die erste.

In der That, bey der gegenseitigen Wirkung derjenigen Körper, die zu irgend einem zusammengesetzten System gehören, wirkt jeder von ihnen auf die an ihn grenzenden, und diese pflanzen diese Wirkung nach und nach zu den andern fort, so daß man jederzeit nur auf die unmittelbare Wirkung zu achten hat, die zwischen den an einander stoßenden Körpern ausgeübt wird (73.). Nun aber hängt die Intensität der Wirkung, welche irgend ein Körper auf jeden von denen, die an ihn grenzen, ausübt, einzig und allein von ihrer respectiven Geschwindigkeit ab; folglich verändert die geometrische Bewegung, da sie diese wechselseitige Wirkung nicht ändert, die respective Geschwindigkeit eben so wenig; folglich streben diese beyden an einander stoßenden Körper im ersten Augenblick eben so wenig sich einander zu nähern, oder von einander zu entfernen, als sie es thun würden, wenn diese geometrische Bewegung aufgehoben wäre. Folglich strebt die, dieser geometrischen Bewegung gerade zu entgegengesetzte auf die nämliche Weise auch nicht, weder diese beyden Körper einander zu nähern, noch von einander zu entfernen; folglich verändert sie, eben so wenig wie die erste, die Intensität der Wirkung, die zwischen diesen beyden an einander stoßenden Körpern Statt findet, um nichts; mithin ist diese zweyte Bewegung selbst eine von denen, die ich geometrische genannt habe, und muß folglich ohne Störung Statt finden, weil es zur Natur dieser Bewegungen gehört, die verschiedenen Körper des

Systems niemals zu nöthigen, daß sie sich einander im Wege wären. *Dieß war es, was bewiesen werden sollte.*

149. Gesetzt, zwey Körper A, B z. B. seyen im Begriff, sich einander zu begegnen, und es entsteht daraus ein Stoß. Theilen wir, in dem Augenblicke des Stoßes dem Systeme eine gemeinschaftliche Bewegung nach der Centrallinie mit, so wird diese gemeinschaftliche Bewegung (136.) eine geometrische Bewegung seyn. Auch ist es einleuchtend, daß die ihm gleiche und gerade zu entgegengesetzte Bewegung ebenfalls eine mögliche und geometrische Bewegung seyn würde.

Aber, wenn man, anstatt dieser ersten gemeinschaftlichen Bewegung, z. B. dem B nach der Richtung $\overline{AB}$ eine größere Geschwindigkeit als die, welche man zu gleicher Zeit A giebt, mittheilte; so würde diese Bewegung zwar möglich, aber nicht geometrisch seyn; denn, um dem Systeme eine gleiche und gerade zu entgegengesetzte Richtung zu geben, müßte B eine größere Geschwindigkeit, als A, in der Richtung von $\overline{BA}$ annehmen können. Dieß ist augenscheinlich unmöglich, wegen der Undurchdringlichkeit der Körper. Eben so, wenn sich zwey Körper A, B getrennt durch einen unausdehnbaren Faden, auf irgend eine Weise fortzögen und sich so bewegten, daß der Faden immer gespannt bliebe, so würde die wirkliche und nicht aufgehobene Bewegung, für irgend einen Augenblick genommen, nothwendig geometrisch seyn; denn die aufgehobene Bewegung spannt den Faden. Also wird durch die wirkliche und nicht aufgehobene Bewegung, als die einzige, welche nach der Voraussetzung hier in Erwägung zu ziehen ist, die wechselseitige Wirkung der Körper weder vermehrt noch vermindert: folglich gehört sie zu denen, die ich geometrische genannt habe. Auch ist es einleuchtend, daß die ihr gleiche und gerade zu entgegengesetzte Bewegung möglich und geometrisch ist; denn sie kann durch die Wirkung und Gegenwirkung der Körper, die sich einander aufheben, nicht verändert werden, und würde auch umgekehrt sie nicht verändern können, weil sie eben so wenig als die, welche ihr gleich und gerade zu entgegengesetzt ist, die zwey beweglichen Körper A und B einander zu nähern, oder von einander zu entfernen strebt.

Dritter Lehrsatz.

150. **Wenn zwey geometrische Bewegungen einem und ebendemselben Systeme von Körpern zu gleicher Zeit mitgetheilt werden, so wird, dieß System mag vollkommen frey, oder durch Widerstand beschränkt werden, die aus beyden entspringnde Bewegung ebenfalls eine geometrische Bewegung seyn.**

Denn die an einander grenzenden Körper des Systems, durch welche sich die Bewegung nach und nach, von einem zum andern, je zwey und zwey betrachtet, fortpflanzt, streben sich weder einander zu nähern, noch von einander zu entfernen, weder vermöge der ersten, noch vermöge der zweyten der beyden sie zusammensetzenden Bewegungen, weil sie nach der Voraussetzung beyde geometrisch sind. Folglich streben sie eben so wenig, sich durch Hülfe der aus den beyden erstern entspringenden Bewegung, weder einander zu nähern, noch sich von einander zu entfernen. Folglich verändert diese zusammengesetzte Bewegung nichts an den Geschwindigkeiten dieser Körper, sofern sie an einander grenzen, je zwey und zwey auf einmal betrachtet, das heißt, sie ändert nichts an der Geschwindigkeit derer, die unmittelbar auf einander wirken können. Folglich kann sie ihre gegenseitige Wirkung nicht stören; mithin gehört sie zu den von mir sogenannten geometrischen Bewegungen. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

151. Dasselbe würde augenscheinlich auch dann der Fall seyn, wenn man, anstatt der mitgetheilten zwey geometrischen Bewegungen, irgend eine beliebige Anzahl derselben dem System auf einmal mittheilte, vorausgesetzt, daß sie alle geometrisch wären.

Zweyter Zusatz.

151. Folglich, wenn man im Gegentheil eine geometrische Bewegung in zwey andere zerlegt, von denen die eine auch eine geometrische Bewegung ist, so wird die andere ebenfalls eine seyn, und so kann man jede geometrische Bewegung in so viel andere geometrische Bewegungen zerlegen, als man will.

Vierter Lehrsatz.

153. Bey einem jeden beliebigen Systeme harter Körper wird, wenn ein Stoß oder irgend eine augenblickliche Wirkung, es sey unmittelbar oder durch eine Maschiene ohne Feder, hinzukommt, die Bewegung, welche das System nach dem Stoße nehmen wird, nothwendig eine geometrische Bewegung seyn.

Denn nach (73.) haben die an einander stoßenden Körper, welche allein unmittelbar auf einander wirken, und durch die sich die Bewegung von einem zum andern, von Glied zu Glied fortpflanzt, je zwey und zwey, nach dem Stoße dieselbe Geschwindigkeit in der Richtung ihrer wechselseitigen Wirkung, das heißt, sie haben nach dem Stoße eine relative Geschwindigkeit $= 0$; folglich können die Bewegungen, durch die sie nach dem Stoße bewegt werden, das heißt, ihre wirklichen, und durch den Stoß nicht vernichteten Bewegungen keine neue Wirkung unter diesen Körpern hervorbringen. Folglich ist die Bewegung des Systems nach dem Stoße geometrisch. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Fünfter Lehrsatz.

154. Jede geometrische, irgend einem Systeme von Körpern mitgetheilte Bewegung wird von dem Systeme ohne irgend eine Veränderung aufgenommen.

Denn da diese geometrische Bewegung, nach der Definition, an der Wirkung, welche die Körper auf einander ausüben, nichts ändern kann, so kann sie auch ihrerseits keine Veränderung durch diese wechselseitige Wirkung erleiden. In der That, jeder Körper folgt vollkommen irgend einer ihm mitgetheilten Kraft, wenn er nicht von dem an ihn grenzenden Körpern gehindert wird, folglich wird diese mitgetheilte Bewegungsgröße ohne Veränderung aufgenommen, so sehr sie Statt finden kann, ohne selbst etwas an der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander zu verändern. Dieß ist aber eben der unterscheidende Charakter der sogenannten geometrischen Bewegungen; daher muß wirklich jede geometrische Bewegung von dem Systeme ohne irgend eine Veränderung aufgenommen werden. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Dritter Zusatz.

155. Wenn das System schon von einer andern geometrischen, oder einer von der wechselseitigen Wirkung der Körper unabhängigen Bewegung, die mithin fähig ist, ebenfalls, ohne Veränderung aufgenommen zu werden, schon in Bewegung gesetzt ist, so wird sich dieselbe mit der neuen mitgetheilten Bewegung verbinden, und die aus beyden resultirende Bewegung wird die seyn, welche das System nach dem Stoße, oder irgend einer Einwirkung wirklich haben wird.

Sechster Lehrsatz.

156. **Wenn man bey einem System von harten Körpern, die auf einander entweder unmittelbar, oder vermöge irgend einer Maschiene ohne Federkraft wirken, die allgemeine Bewegung in dem Augenblicke, wo der Stoß vor sich gehen will, in zwey andere zerlegt, deren eine die ist, welche nach dem Stoß Statt finden soll, so wird die andere nothwendig die seyn, welche aufgehoben werden soll; und diese beyden zusammensetzenden Bewegungen sind von der Art, daß, wenn die erste allein wäre, sie ohne Veränderung aufgenommen werden würde, und wenn die zweyte**

allein wäre, ein Gleichgewicht im ganzen Systeme entstehen würde.

In der That leuchtet es fürs erste ein, daß, wenn man die Bewegung des Systems vor dem Stoße in zweye zerlegt, deren eine diejenige ist, welche nach dem Stoß Statt haben soll, die andere die ist, welche aufgehoben werden muß. Aber es ist noch zu untersuchen, was Statt haben müßte, wenn das System jeder dieser Bewegungen insbesondere überlassen würde. Nun ist nach dem vorhergehenden Lehrsatz, die Bewegung, welche nach dem Stoß Statt finden muß, nothwendig geometrisch, und folglich (154.) wird sie ohne Veränderung aufgenommen. Dieß war das erste, was bewiesen werden sollte. Ferner, weil diese erste Bewegung geometrisch ist, so strebt sie weder die stoßenden Körper je zwey und zwey einander zu nähern, noch von einander zu entfernen; folglich wird die Einwirkung dieser Körper durch die Wegnahme dieser Bewegung nicht verändert; mithin würden sich diese zweyten Bewegungen, da sie sich in der That vernichten, auch dann eben so gut sich einander aufheben, wenn die andern wegfielen, d. h. die, welche Statt finden sollen. Dieß war noch übrig zu beweisen.

Vierter Zusatz.

157. Die beyden Bewegungen, in welche sich

die des Systems vor dem Stoße zerlegen läßt, sind folglich dergestalt von einander unabhängig, daß, wenn die eine wegfällt, bey der andern der Erfolg genau derselbe seyn muß, als wenn man die erstere nicht weggelassen hätte.

Hierinne besteht der berühmte d'Alembertische Grundsatz; aber es ist sehr nothwendig, nicht zu vergessen, daß dieß nur bloß bey vollkommen harten Körpern und Maschienen ohne Federkraft Statt findet; dieß, dünkt mich, ist nicht bestimmt angemerkt worden. Wären die Körper elastisch, so würde sich zwar die Bewegung vor dem Stoß eben so, wie bey harten Körpern, in zweye zerlegen lassen, deren eine die wäre, welche nach dem Stoß Statt haben soll, und die andere aufgehoben werden würde; aber eine Unabhängigkeit dieser Bewegungen von einander würde nicht Statt finden; denn wenn man die erste allein wegließe, so gäbe dieß noch kein Gleichgewicht. Diese Unabhängigkeit der beyden Bewegungen gründet sich darauf, daß die Bewegung, die nach dem Stoße eintreten soll, geometrisch ist, d. h. daß sie die Intensität des Stoßes weder zu vermehren noch zu vermindern strebt; und das ist sie bloß darum, weil die Körper hart sind, und ihre relative Geschwindigkeit daher nach dem Stoße = 0 ist, und folglich auch die Körper weder einander zu nähern, noch von einander zu entfernen strebt; dieß findet sich nun bey elastischen Körpern nicht, deren relative Geschwindigkeit nach dem Stoße nicht Null, sondern der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoße gleich ist (73.).

Siebenter Lehrsatz.

158. Wenn man in einem System harter Körper, die, entweder unmittelbar, oder vermöge irgend einer nicht elastischen Maschiene auf einander wirken, in dem Augenblick, wo der Stoß vor sich gehen will, die allgemeine Bewegung in zwey andere zerlegt, wovon die eine diejenige ist, die durch den Stoß aufgehoben werden soll, und man an die Stelle der zweyten irgend eine andere, geometrische Bewegung setzt; so wird diese neue Bewegung diejenige seyn, welche wirklich nach dem Stoße wird Statt haben sollen.

Denn diese Substitution besteht sichtlich in zwey andern Operationen, die zu gleicher Zeit vor sich gehen; nämlich 1) in der Weglassung der Bewegung, die nach dem Stoße Statt finden sollte; 2) in ihrer Wiederersetzung durch eine andere geometrische Bewegung. Da aber nun diese beyden

Bewegungen, die unterdrückte und die mitgetheilte, beyde geometrisch sind, so kann auch keine die Einwirkung der Körper auf einander verändern, und die gegenseitige Wirkung der Körper kann auch umgekehrt keinen Einfluß auf sie haben. Folglich müssen die beyden Operationen ihre volle Wirkung erhalten, d. h. die erste dieser Bewegungen wird durch die andere ganz einfach und lediglich ersetzt werden, und mithin wird diese letztere die seyn, welche das System nach dem Stoße bewegen wird. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Achter Lehrsatz.

159. **Die kleinste Kraft ist zureichend, um das Gleichgewicht in einem Systeme von Körpern aufzuheben, von welcherley Kräften es auch belebt seyn mag, vorausgesetzt, daß diese Kraft angewendet wird, um eine geometrische Bewegung hervorzubringen; hingegen zur Hervorbringung auch der unendlich kleinsten, aber nicht geometrischen Bewegung, ist nothwendig eine endliche Kraft erforderlich.**

Denn im erstern Falle hat die mitgetheilte Kraft keinen Einfluß auf die Kräfte, welche sich im Systeme das Gleichgewicht halten, und hat also auch keinen Widerstand zu überwinden, als die Trägheit der Körper. Nun aber widersteht ein Körper in Ruhe durch seine Trägheit nur mit einer Kraft, die der ihm mitgetheilten gleich ist; folglich wird in diesem Falle die mitgetheilte Kraft, wie klein sie auch seyn mag, eine Bewegung im Systeme hervorbringen.

Das nämliche wird aber dann nicht mehr gelten, wenn diese Kraft angewendet wird, um eine nicht geometrische Bewegung hervorzubringen; denn sie müßte dann, vermöge der Voraussetzung, zuerst den Zusammenhang der Körper zerreißen, und folglich zuförderst den Druck oder die Einwirkung derselben auf einander, sie mag seyn, von welcher Art sie will, überwiegen; dieß ist aber nur allein möglich bey einer Kraft, die größer ist, als dieser Druck, und die folglich eine endliche seyn muß. Dieß war das, was bewiesen werden sollte.

Definition.

160. Wenn in einem Systeme von Körpern Gleichgewicht Statt findet; es sey nun unmittelbar, oder vermöge einer nicht elastischen Maschiene, und man hat dieß Gleichgewicht durch die Wirkung einer unendlich kleinen Kraft

gestört, so heißt die Geschwindigkeit, die dann jeder Körper des Systems annimmt, seine virtuelle Geschwindigkeit, und die allgemeine Bewegung des Systems, heißt dann seine virtuelle Bewegung.

Neunter Lehrsatz.

161. Jede virtuelle Bewegung in irgend einem Systeme von Körpern ist nothwendig geometrisch.

Denn diese virtuelle Bewegung soll, nach der Definition, durch eine unendlich kleine Kraft in dem System, welches sich im Gleichgewicht befindet, hervorgebracht werden; aber zu Folge des vorhergehenden Lehrsatzes kann in einem System, das im Gleichgewicht ist, eine unendlich kleine Kraft keine andere, als eine geometrische Bewegung hervorbringen, folglich muß jede hervorgebrachte virtuelle Bewegung nothwendig eine solche seyn, die wir geometrische Bewegung genannt haben. Dieß war das, was bewiesen werden sollte.

Zusatz.

162. Folglich hängt die Untersuchung der virtuellen Bewegung in einem jeden Systeme von

Körpern nur von den Bedingungen der Verbindung ab, die unter den Theilen des Systemes Statt findet, und keinesweges von den Regeln der Mechanik; sie macht also einen Theil der Wissenschaft aus, die wir zwischen der gewöhnlichen Geometrie und der Wissenschaft von der Mittheilung der Bewegung zwischen inne stehend genannt haben (145.).

Zehnter Lehrsatz.

163. Bey dem Stoße zweyer festen Körper, sie mögen beyde beweglich, oder einer von ihnen unbeweglich seyn, ist die Summe der Producte von der Quantität der Bewegung, die jeder verliehrt, multiplicirt durch seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, in der Richtung dieser Bewegungsgröße geschätzt, gleich Null.

Es seyen A und B (Fig. 20.) die beyden gegebenen Körper. Ich nehme an, daß ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße, sowohl nach ihrer Größe, als Richtung, durch $\overline{AA^1}$, $\overline{BB^1}$ ausgedrückt werden; daß ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$ seyen, und daß endlich ihre durch den Stoß verlohrnen Geschwindigkeiten durch $\overline{Aa^1}$, $\overline{Bb^1}$ vorgestellt werden.

Die Geschwindigkeit $\overline{AA'}$ wird folglich die resultirende von $\overline{Aa}$ und $\overline{Aa'}$, und die Geschwindigkeit $\overline{BB'}$ die resultirende aus $\overline{Bb}$ und $\overline{Bb'}$ seyn.

Ferner, da die Wirkung und Gegenwirkung gleich und sich entgegen gesetzt seyn müssen, so werden sich die Richtungen $\overline{Aa'}$, $\overline{Bb'}$ in einer und derselben geraden Linie $\overline{AB}$ befinden, und man wird haben

$$A \cdot \overline{Aa'} = - B \cdot \overline{Bb'} \cdot \text{(A.)}$$

Aber nach dem Grundsatz, daß die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße bey harten Körpern, so wie wir sie hier annehmen, gleich Null ist, — d. h. nach dem Prinzip der Gleichheit ihrer Geschwindigkeiten, nach der Richtung ihrer Wirkung auf einander geschätzt, — müssen $\overline{Aa}$ und $\overline{Bb}$, beyde in derselben Richtung $\overline{AB}$ geschätzt, sich gleich seyn; d. h. man wird die Gleichung haben

$$\overline{Aa} \cdot \cos.\, aAa' = \overline{Bb} \cdot \cos.\, bBb'. \text{ (B)}$$

Multiplicirt man diese letzte Gleichung durch die Gleichung (A) und versetzt sie, so erhält man

$$A \cdot \overline{Aa} \cdot \overline{Aa^1} \cdot \cos.\, aAa^1 + B \cdot \overline{Bb} \cdot \overline{Bb^1} \cdot \cos.\, bBb^1 = o, \quad (C) \text{ oder}$$

$$(A \cdot \overline{Aa^1})(\overline{Aa} \cdot \cos.\, aAa^1) + (B \cdot \overline{Bb^1})(\overline{Bb} \cdot \cos.\, bBb^1) = o, \quad (D).$$

Nun ist $A \cdot \overline{Aa^1}$ die Quantität, der durch den Körper A verlohrnen Bewegung, und $\overline{Aa} \cdot \cos.\, aAa^1$ ist seine Geschwindigkeit, in der Richtung dieser Bewegungsgröße geschätzt.

Eben so ist $B \cdot \overline{Bb^1}$ die Quantität der durch den Körper B verlohrnen Bewegung, und $\overline{Bb^1} \cos.\, bBb^1$ ist seine Geschwindigkeit, in der Richtung dieser Kraft geschätzt. Folglich ist diese Gleichung (D) nichts anders, als eine algebraische Uebersetzung des ausgesprochenen Theorems.

Wir haben jedoch in der Erklärung angenommen, daß beyde Körper A und B beweglich sind. Wenn einer von ihnen, z. E. B unbeweglich wäre, so würde die Gegenwirkung der Wirkung nicht mehr gleich und entgegengesetzt seyn; und die obige Gleichung (A) gälte nicht mehr; aber die Gleichung (B) würde immer noch richtig seyn, weil dieser unbewegliche Körper, oder der Widerstand ohne Elasticität angenommen wird. Folglich würde wegen $Bb = o$, die Gleichung (C) noch bestehen, und auch die Gleichung (D) würde daher gelten, wie im ersten Fall; mithin gilt diese

Gleichung (D) die, wie wir gesehen haben, eine algebraische Uebersetzung des Theorems ist, immer, es mögen die Körper beyde beweglich, oder der eine unbeweglich seyn; folglich ist der ausgesprochene Lehrsatz wahr in allen nur möglichen Fällen. Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

164. Wir können der Gleichung (D) folgende Form geben:

$$A \cdot \overline{A\,a} \cdot (\overline{A\,A'} \cdot \cos. A'\,A\,a - \overline{A\,a}) + B \cdot \overline{B\,b}\,(B\,B' \cdot \cos. B'\,\overline{B\,b} - B\,b) = 0, \quad (E);$$

denn da $\overline{A\,A'}$ das resultirende aus $\overline{A\,a}$ und $\overline{A\,a'}$ ist, so müssen wir haben (26.)

$$\overline{A\,a'} \cdot \cos. a\,A\,a' = \overline{A\,A'} \cdot \cos. A'\,A\,a - \overline{A\,a}$$

$$\overline{B\,b'} \cdot \cos. b\,B\,b' = \overline{B\,B'} \cdot \cos. B'\,B\,b - \overline{B\,b}.$$

Substituirt man den Werth von $\overline{A\,a'} \cdot \cos. a\,A\,a'$, $\overline{B\,b'} \cdot \cos. b\,B\,b'$ in der Gleichung (C) so wird daraus kommen die Gleichung (E). Dieß war das zu demonstrirende.

Zweyter Zusatz.

165. Um die Vorstellungen leichter fixiren zu können, wollen wir durch folgende Benennungen die verschiedenen Größen unterscheiden, die in den vorhergehenden Gleichungen enthalten sind. Wir setzen

die Masse des Körpers A = . . A

. . . . . B = . . B

die Geschwindigkeit $\overline{AA'}$ des Körpers A vor dem Stoß = . (W, A)

seine Geschwindigkeit $\overline{Aa}$ nach dem Stoß = . . (V, A)

die Geschwindigkeit $\overline{Aa'}$, die durch den Stoß verlohren geht = (U, A)

die Geschwindigkeit, die ihm durch den Körper B mitgetheilt wird, durch die Kraft des Stoßes, und die nach (41.) gleich und entgegengesetzt ist (U, A) = . (U, B, A)

den Winkel A' A a, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, mit seiner Geschwindigkeit vor dem Stoße machte, = . (W, A)^(V, A)

den Winkel A' A a', den seine Geschwindigkeit vor dem Stoße, mit der Geschwindigkeit macht, die er durch den Stoß verliehrt, = (W, A)^(U, A) den Winkel $a A^1 a$, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, mit der Geschwindigkeit macht, die durch den Stoß verlohren geht, $= \quad . \quad . \quad (V, A)^\wedge(U, A)$

und eben so

die Geschwindigkeit $B B^1$ des Körpers B vor dem Stoße $= \quad . \quad (W, B)$

seine Geschwindigkeit nach dem Stoß $= (V, B)$

seine Geschwindigkeit, die durch den Stoß verlohren geht, $= \quad . \quad (U, B)$

die Geschwindigkeit, die ihm der Körper A mittheilt, durch die Kraft des Stoßes, und die der vorigen gleich und gerade entgegengesetzt seyn muß, $= \quad . \quad (U, A, B)$

den Winkel $B^1 B b$, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit vor demselben macht, $= \quad . \quad (W, B)^\wedge(V, B)$

den Winkel $B^1 B b^1$, den seine Geschwindigkeit vor dem Stoß mit der verlohrnen macht, $= (W, B)^\wedge(U, B)$

den Winkel $b B^1 b$, den seine Geschwindigkeit nach dem Stoße mit der verlohren gegangenen macht, $= \quad . \quad . \quad (V, B)^\wedge U, B)$.

Dieß festgesetzt, so ist es klar, daß die Formeln (D) und (E) folgende Gestalt erhalten werden:

$$A . (U, B, A)(V, A) \cos. (V, A)^{\wedge}(U, B, A)$$
$$+ B . (U, A, B)(V, B) \cos. (V, B)^{\wedge}(U, A, B) = o (D^1)$$

$$A . (V, A)[(W, A) \cos. (W, A)^{\wedge}(V, A) - (V, A)]$$
$$+ B . (V, B)[(W, B) \cos. (W, B)^{\wedge}(V, B) - (V, B)] = o, (E^1)$$

Bemerkungen.

166. Man erkennt sehr leicht, welchen Zweck die im vorhergehenden Zusatz angenommenen Benennungen haben. Sie würden unnütz seyn, wenn wir uns bloß auf zwey Körper A und B einschränken wollten; allein, es ist unsere Absicht, die Theorie des Stoßes auf ein jedes System auszudehnen; und dann würden zuviel verschiedene Charaktere gebraucht werden müssen, um alle die Quantitäten zu bezeichnen, die verbunden seyn müssen, wenn man nicht lieber diese Charaktere, vermittelst einer systematischen Ordnung derselben, auf eine kleine Zahl zurückbringen will, die sich mehr dazu eignet, das bemerklich zu machen, worauf sich jedes bezieht, und eine gewisse Gleichförmigkeit in die Ausdrücke zu bringen. Diß kann man auf mehrere Arten thun; die meinige ist, jeden Körper des Systems durch einen besondern Buchstaben zu bezeichnen, also so: überhaupt durch W, die Geschwindigkeit vor dem Stoß; durch V,

dieselbe nach dem Stoß; durch U, die Geschwindigkeit, die durch den Stoß verlohren geht; und ich setze nun zu diesem gemeinschaftlichen Charakter noch den des Körpers hinzu, welchem die Geschwindigkeiten zugehören; ferner bezeichnet man die Winkel zwischen den Geschwindigkeiten durch die Ausdrücke der Geschwindigkeiten selbst, nur getrennt durch das oben zwischen sie gesetzte Zeichen ^. Dadurch passen dieselben Formeln auf jede Zahl von Körpern, ohne daß man die Charaktere zu vervielfältigen braucht, die die Geschwindigkeiten und deren Richtungen bezeichnen sollen.

167. Um den Gebrauch dieser Bezeichnungen zu lehren, wollen wir (Fig. 21.) irgend ein System der Körper A, B, C, D, E, F etc. betrachten, die sich einander zu zwey und zwey, drey und drey u. s. f. auf irgend eine beliebige Weise berühren. Die Geschwindigkeiten dieser Körper vor dem Stoße werden seyn:

(W, A) (W, B) (W, C) etc.

Ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße

(V, A) (V, B) (V, C) etc.

Ihre durch den Stoß verlohrnen Geschwindigkeiten

(U, A) (U, B) (U, C) etc.

Die Winkel zwischen den Geschwindigkeiten
(W, A) und (V, A), (W, B) und (V, B),
(W, C) und (V, C) etc.
werden seyn:

$$(W, A)^\wedge(V, A), \ (W, B)^\wedge(V, B), \\ (W, C)^\wedge(V, C) \text{ etc.}$$

Die Geschwindigkeit, welche A mittheilt an B, wird seyn (U, A, B); die, welche B mittheilt an C, wird seyn (U, B, C) etc. Folglich wird die Quantität der Bewegung, welche A mittheilt an B, seyn B (U, A, B); die Quantität der Bewegung, welche B mittheilt an C, wird seyn C (U, B, C) etc.

So wird (U, A) z. B., welches die Geschwindigkeit ist, die A verlohren hat, und die folglich derjenigen gleich und im Diameter entgegengesetzt ist, die A gewonnen hat, auch gleich und gerade entgegengesetzt seyn der aus allen Geschwindigkeiten resultirenden, die dem Körper A durch alle übrige Körper des Systems mitgetheilt werden. Aber diejenigen unter den übrigen Körpern, welche A Bewegung mittheilen, beschränken sich (146.) auf die, welche unmittelbar an ihm anliegen, d. h. in der hier untersuchten Figur, auf die drey Körper B, G, L. Folglich werden wir haben (26.)

$$\begin{aligned}(U, A) \cos. (U, A)^\wedge(V, A) = \\ &- (U, B, A) \cos. (U, B, A)^\wedge(V, A) \\ &- (U, G, A) \cos. (U, G, A)^\wedge(V, A) \\ &- (U, L, A) \cos. (U, L, A)^\wedge(V, A)\end{aligned} \quad 1$$

Eben so werden wir z. E. für den Körper F haben:

$$(U, F) \cos. U, F)^{\wedge} V, F) =$$
$$- (U, B, F) \cos. (U, B, F)^{\wedge}(V, F)$$
$$- (U, C, F) \cos. (U, C, F)^{\wedge}(V, F)$$
$$- (U, H, F) \cos. (U, H, F)^{\wedge}(V, F)$$
$$- (U, J, F) \cos. (U, J, F)^{\wedge}(V, F)$$
$$- (U, K, F) \cos. (U, K, F)^{\wedge}(V, F)$$

Es sind dieß Gleichungen, die ganz einfach bezeichnen, daß die durch den Körper A verlohrne Geschwindigkeit, in der Richtung der Geschwindigkeit geschätzt, die ihm nach dem Stoß noch übrig ist, gleich, und schnurstracks entgegengesetzt ist der Summe von den Geschwindigkeiten, die ihm zugleich durch die Körper B, G, L, mit denen er zusammenstößt, mitgetheilt werden, alle in derselben Richtung von der ihm noch übriggebliebenen Geschwindigkeit angegeben; und eben so, daß die durch F verlohrne Geschwindigkeit, in der Richtung der nach dem Stoß ihm übrigbleibenden Geschwindigkeit betrachtet, gleich und gerade entgegengesetzt ist der Summe von den Geschwindigkeiten, die ihm zugleich durch die Körper B, C, H, J, K, an welche er angrenzt, mitgetheilt werden, alle wieder angegebenen in gleicher Richtung mit der ihm noch übrig bleibenden Geschwindigkeit; so auch mit den übrigen.

Eilfter Lehrsatz.

168. Bey dem Stoße fester Körper,

es mögen ihrer auch in dem Systeme seyn, wie viel ihrer wollen, auch mögen sie alle beweglich, oder zum Theil befestigt seyn, ist die Summe der Producte der Quantität von Bewegung, die durch jeden Körper verlohren geht, multiplicirt durch seine Geschwindigkeit nach dem Stoß, in der Richtung dieser verlohrnen Quantität von Bewegung betrachtet, gleich Null.

Dieser Satz ist ganz der ausgesprochene Lehrsatz (163.) angewendet auf irgend eine beliebige Zahl von Körpern, und läßt sich leicht aus derselben beweisen. Denn in der That: es mögen (Fig. 21.) so viel Körper seyn, als man will, auf die plötzlich ein Stoß geschieht; die Figur zeigt deutlich genug an, welche Körper an einander stoßen, und unter denen folglich nur allein eine unmittelbare Einwirkung Statt findet. Dieß angenommen, so sieht man, nach der obigen (166.) Anmerkung, daß wir folgende Reihe von Gleichungen in derselben Zahl erhalten, als wie viel Körper in dem System sind:

$$\begin{aligned} A\,(U,A)\,(V,A)\cos.(U,A)^{\wedge}(V,A) = & \\ & -A\,(U,B,A)(V,A)\cos.(U,B,A)^{\wedge}(V,A) \\ & -A\,(U,G,A)(V,A)\cos.(U,G,A)^{\wedge}(V,A) \\ & -A\,(U,L,A)(V,A)\cos.(U,L,A)^{\wedge}(V,A) \end{aligned}$$

$$B\,(U,B)\,(V,B)\cos.\,(U,B)^\wedge(V,B) =$$
$$-\,B\,(U,A,B)\,(V,B)\cos.\,(U,A,B)^\wedge(V,B)$$
$$-\,B\,(U,C,B)\,(V,B)\cos.\,(U,C,B)^\wedge(V,B)$$
$$-\,B\,(U,F,B)\,(V,B)\cos.\,(U,F,B)^\wedge(V,B)$$
$$-\,B\,(U,G,B)\,(V,B)\cos.\,(U,G,B)^\wedge(V,B)$$

$$C\,(U,C)\,(V,C)\cos.\,U,C)^\wedge(V,C) =$$
$$-\,C\,(U,B,C)\,(V,C)\cos.\,(U,B,C)^\wedge(V,C)$$
$$-\,C\,(U,D,C)\,(V,C)\cos.\,(U,D,C)^\wedge(V,C)$$
$$-\,C\,(U,E,C)\,(V,C)\cos.\,(U,E,C)^\wedge(V,C)$$
$$=\,C\,(U,F,C)\,(V,C)\cos.\,(U,F,C)^\wedge(V,C)$$

$$D\,(U,D)\,(V,D)\cos.\,(U,D)^\wedge(V,D) =$$
$$-\,D\,(U,C,D)\,(V,D)\cos.\,(U,C,D)^\wedge(V,D)$$

$$E\,(U,E)\,(V,E)\cos.\,(U,E)^\wedge(V,E =$$
$$-\,E\,(U,C,E)\,(V,E)\cos.\,(U,C,E)^\wedge(V,E)$$

$$F\,(U,F)\,(V,F)\cos.\,(U,F)^\wedge(V,F) =$$
$$-\,F\,(U,B,F)\,(V,F)\cos.\,(U,B,F)^\wedge(V,F)$$
$$-\,F\,(U,C,F)\,(V,F)\cos.\,(U,C,F)^\wedge(V,F)$$
$$-\,F\,(U,H,F)\,(V,F)\cos.\,(U,H,F)^\wedge(V,F)$$
$$-\,F\,(U,t,F)\,(V,F)\cos.\,(U,t,F)^\wedge(V,F)$$
$$F\,(U,K,F)\,(V,F)\cos.\,(U,K,F)^\wedge(V,F)$$

$$G\,(U,G)\,(V,G)\cos.\,(U,G)^\wedge(V,G) =$$
$$-\,G\,(U,A,G)\,(V,G)\cos.\,(U,A,G)^\wedge(V,G)$$
$$-\,G\,(U,B,G)\,(V,G)\cos.\,(U,B,G)^\wedge(V,G)$$
$$-\,G\,(U,H,G)\,(V,G)\cos.\,(U,H,G)^\wedge(V,G)$$

$$H\,(U,H)(V,H)\cos.(U,H)^{\wedge}(V,H) =$$
$$-H\,(U,F,H)(V,H)\cos.(U,F,H)^{\wedge}(V,H)$$
$$-H\,(U,G,H)(V,H)\cos.(U,G,H)^{\wedge}(V,H)$$
$$-H\,(U,J,H)(V,H)\cos.(U,J,H)^{\wedge}(V,H)$$

$$J\,(U,J)(V,J)\cos.(U,J)^{\wedge}(V,J) =$$
$$-J\,(U,F,J)(V,J)\cos.(U,F,J)^{\wedge}(V,J)$$
$$-J\,(U,H,J)(V,J)\cos.(U,H,J)(V,J)$$
$$-J\,(U,K,J)(V,J)\cos.(U,K,J)^{\wedge}(V,J)$$

$$K\,(U,K)(V,K)\cos.(U.K)^{\wedge}(V,K) =$$
$$-K\,(U,F,K)(V,K)\cos.(U,F,K)^{\wedge}(V,K)$$
$$K\,(U,J,K)(V,K)\cos.(U,J,K)(V,K)$$

$$L\,(U,L)(V,L)\cos.(U,L)^{\wedge}(V,L) =$$
$$L\,(U,A,L)(V,L)\cos.(U,A,L)^{\wedge}(V,L)$$

Ich füge sämmtlich diese Gleichungen hier bey, sehe aber gar wohl ein, daß alle Glieder des zweyten Stückes sich immer gegenseitig aufheben, vermöge des Lehrsatzes (163.); denn z. B. das erste Glied des zweyten Stückes der ersten Gleichung, drückt sichtlich (164) die Quantität der A durch B mitgetheilten Bewegung aus, geschätzt nach der Richtung der Geschwindigkeit von A nach dem Stoß, und eben so wieder, das erste Glied des zweyten Stückes der zweyten Gleichung ist die Quantität der B durch A mitgetheilten Bewegung, geschätzt in der Richtung der Geschwindigkeit von B nach dem Stoße. Nun ist, vermöge des angeführten Satzes, die Summe dieser beyden Quantitäten gleich Null, wie man dieß aus der Formel (D^1) (165.) sieht, welcher eine andere Uebersetzung dieses Satzes, und die nämliche Summe ist, von der wir gesprochen haben.

Aus dem nämlichen Grunde sieht man, daß das zweyte Glied des zweyten Stückes der ersten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der siebenden, zusammen eine Summe geben müssen, die gleich Null ist; eben so das dritte Glied des zweyten Stückes der ersten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der eilften; gleichfalls, das zweyte Glied des zweyten Stückes der zweyten Gleichung, und das erste Glied des zweyten Stückes der dritten Gleichung; und so fort. Folglich fällt das ganze zweyte Stück der Gleichung, die aus allen übrigen resultirt, ganz weg; mithin ist auch die Summe der ersten Stücke Null.

Nun ist die Summe dieser letztern augenscheinlich die Summe der Producte der Quantität der Bewegung, die durch jeden Körper des Systems verlohren geht, multiplicirt durch seine Geschwindigkeit nach dem Stoße, in der Richtung dieser Quantität von Bewegung geschätzt. Folglich ist diese Summe gleich Null, und dieß ist ganz genau das, was in unserm Satze behauptet wurde. Dieß war es, was bewiesen werden mußte.

Erster Zusatz.

169. Wir wollen durch M die Masse jedes Körpers des Systems, durch W seine Geschwindigkeit vor dem Stoß, durch V seine Geschwindigkeit nach dem Stoß, durch U seine durch den Stoß verlohrne Geschwindigkeit, durch das Zeichen ^ jederzeit, wenn es über die Bezeichnung zweyer Linien gesetzt wird, den Winkel, den sie bilden; und endlich durch $\underline{\text{Sum.}}$ die Summe aller Quantitäten derselben Art ausdrücken. Wir werden folglich für das ganze System haben

$$\underline{\text{Sum.}}\ M \cdot U \cdot V \cdot \cos.\ \hat{UV} = 0\ (F).$$

Zweyter Zusatz.

170. Da dieser Satz immer gilt, wie groß auch die Zahl der Körper, und wie auch ihre Lage zu einander seyn mag, sie mögen ferner alle beweglich, oder zum Theil befestigt seyn (163.): so muß er auch offenbar gelten, der Stoß mag unter ihnen unmittelbar geschehen, oder vermittelst irgend einer nicht elastischen Maschiene wirken.

Dritter Zusatz.

171. Für jeden von den fixen Körpern hat man V = o. Also fällt das Glied, was ihm

zugehört, weg, und folglich kommt in die vorhergehende Formel nichts, als die beweglichen Theile des Systems. Wenn also die Vertheilung der Bewegungen durch eine Maschiene geschieht, die befestigte Theile hat, oder an Widerstand leistende Gegenstände geräth, die unbeweglich, und vollkommen befestigt sind, so kommen alle diese unbeweglichen Theile gar nicht in die Formel.

Vierter Zusatz.

172. Man kann auch der gefundenen Formel einen andern Ausdruck geben, denn man hat (26.)

$$U. \cos. U^\wedge V = W. \cos. W^\wedge V - V;$$

Substituirt man diesen Werth von $U. \cos. U^\wedge V$ in der gefundenen Formel (F), so wird sie lauten:

$$\underline{\text{Sum.}}\ M. W. V. \cos. W^\wedge V - \underline{\text{Sum.}}\ M. V^2 = 0$$

oder

$$\underline{\text{Sum.}}\ M. W. V. \cos. W^\wedge V = \underline{\text{Sum.}}\ M. V^2. \quad (F^{I})$$

Fünfter Zusatz.

173. Man kann auch der Formel (F) (169.) noch einen neuen Ausdruck geben; denn da W resultirt aus V und U, so werden wir haben,

indem wir die drey Geschwindigkeiten in der Richtung U schätzen:

$$V. \cos. V^\wedge U = W. \cos. W^\wedge U - U.$$

Substituirt man den Werth von $V. \cos. V^\wedge U$ in der Formel (F) so lautet sie:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MUW \cos. W^\wedge U - \underline{\text{Sum.}}\ MU^2 = 0\ (F'')$$

Sechster Zusatz.

174. Es ist noch eine Veränderung der Gleichung (F) möglich, auf eine andere Weise, denn da W immer das Resultat von V und U ist, so hat man:

$$W = V \cos. W^\wedge V + U \cos. W^\wedge U.$$

Wenn man diesen Werth von W in die Formel (F') (172.) bringt, die schon eine Verwandlung der Formel (F) ist, so wird man haben:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MV^2 \cos. W^\wedge V^2 + \underline{\text{Sum.}}\ MVU. \cos. W^\wedge V. \cos. W^\wedge U = \underline{\text{Sum.}}\ MU^2 \text{ oder}$$

$$\underline{\text{Sum.}}\ MVU. \cos. W^\wedge V. \cos. W^\wedge U = \underline{\text{Sum.}}\ MV^2 (1 - \cos. W^\wedge V^2) = \underline{\text{Sum.}}\ MV^2 \sin. W^\wedge V^2; \text{ folglich}$$

$$\underline{\text{Sum.}}\ MVU. \cos. W^\wedge V. \cos. W^\wedge U = \underline{\text{Sum.}}\ MV^2. \sin. W^\wedge V^2.\ (F''')$$

Zwölfter Lehrsatz.

175. **Wenn harte Körper von beliebiger Anzahl zusammenstoßen, es geschehe dieß unmittelbar, oder mittelst irgend einer Maschiene ohne Federkraft, so ist die Summe der lebendigen Kräfte vor dem Stoße, allezeit gleich der Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße, plus der Summe der lebendigen Kräfte, welche Statt finden würden, wenn sich jeder Körper bloß mit der Geschwindigkeit, welche er durch den Stoß verlohren hat, frey bewegte.**

Es sey MAmB ein Parallelogramm, die Diagonale $\overline{Mm}$ stelle W, die Seite $\overline{MA}$, V, und folglich die Seite $\overline{MB}$, U vor, so ist in dem Dreyeck MAm,

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{Am}^2 - 2.\ MA.Am.\cos.MAm:$$

hieraus wird, weil MAm das Complement zu AMB ist,

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{Am}^2 + 2.\ \overline{MA}.\ \overline{Am}.\ \cos.\ AMB.$$

Da aber AMB = V″U, so wird aus der vorigen Gleichung:

$$W^2 = V^2 + U^2 + 2.\ V.U.\ \cos.\ V''U.$$

mithin:

$$\underline{\text{Sum.}}\ M.\ W^2 = \underline{\text{Sum.}}\ M.\ V^2 + \underline{\text{Sum.}}\ M.\ U^2 + 2.\ \underline{\text{Sum.}}\ \overline{M.}\ V.\ U.\ \cos.\ \overline{V^{\prime}U}.$$

Da aber das letzte Glied dieser Gleichung $= 0$ ist (169.); so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\underline{\text{Sum.}}\ M.\ W^2 = \underline{\text{Sum.}}\ M.\ V^2 + \underline{\text{Sum.}}\ M.\ U^2, \quad (G)$$

und dieß ist der algebraische Ausdruck des obigen Satzes. *Dieß war es, was wir zu beweisen hatten.*

Erster Zusatz.

176. Wenn also mehrere, von beliebigen Kräften bewegte, Körper wechselseitig sich das Gleichgewicht halten, es geschehe dieß unmittelbar, oder mittelst einer Maschiene ohne Federkraft; so ist die Summe der Producte jeder Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher sie sich bewegen will, ein *Minimum*, d. h. weniger als die Summe der Producte jeder Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, welches sie verlichren würde, wenn das System irgend eine geometrische Bewegung annähme.

Es seyen z. B. zwey Massen $\underline{m}$ und $\underline{m^{\prime}}$ an den Enden eines horizontalen Hebels angebracht, dessen Arme $\underline{r}$ und $\underline{r^{\prime}}$ seyen; $\underline{g}$ heiße die Schwere, u, u' die geometrischen oder virtuellen Geschwindigkeiten, die m und m' annehmen würden, wenn eine kleine Bewegung entstünde. Da nun, vermöge der Voraussetzung, Gleichgewicht vorhanden ist, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich jeder der Körper bewegen will, $= g$. Folglich ist, wegen des Gleichgewichts, die verlohrne Geschwindigkeit auch $= g$; mithin die Summe der Producte von jeder dieser Massen in das Quadrat der Geschwindigkeit, welche sie verliehrt, $mg^2 + m'g^2$.

Da aber bey der geringsten Bewegung, welche entstände, $g - u$ die verlohrne Geschwindigkeit für m, und $g + u'$ die für m' seyn würde, so ist, nach dem obigen Grundsatze, $mg^2 + m'g^2$ ein Minimum, oder weniger als $m(g-u)^2 + m'(g+u')^2$; d. h. diese beyden Größen müssen um eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung differiren, weil die Bewegung unendlich klein ist. Man erhält also:

$$mg^2 + m'g^2 = m(g-u)^2 + m'(g+u')^2,$$

oder, wenn man das Verfahren durchführt und reducirt,

$$mu^2 + m'u'^2 = 2\,mgu + 2\,m'gu';$$

oder, da u, u^1 in Beziehung auf g unendlich klein sind, $mgu - m^1 g u^1 = o$;

Dieß giebt $mg : m^1 g = u^1 : u$, wie man aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten erhält. Man kann also diese Formel als einen neuen Grundsatz des Gleichgewichts, oder vielmehr als eine neue Art, den Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten auszudrücken, ansehen. Dieser Grundsatz wird unten (185.) allgemein ausgedrückt werden.

Zweyter Zusatz.

177. Wenn das System seine Bewegung in unmerklichen Graden veränderte, so würde die Größe der in jedem Augenblicke für jeden Körper verlohrnen Bewegung unendlich klein seyn. Man würde also für jeden Augenblick $U = o$ bekommen; folglich wäre U^2 eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung. Mithin würde Sum. MU^2 gegen Sum. MV^2 ganz verschwinden; die Gleichung sich also reduciren auf:

$$\text{Sum. } MW^2 = \text{Sum. } MV^2,$$

d. h. wenn ein System harter Körper, die lediglich durch ihre Trägheit, oder abgesehen von aller bewegenden Kraft auf einander stoßen, seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, so bleibt die Summe der lebendigen Kräfte immerfort unverändert, ungeachtet des Ein- und Rückwirkens der Körper auf einander, und die Bewegung mag von einem dem andern unmittelbar, oder mittelst irgend einer Maschiene ohne Federkraft mitgetheilt werden.

Dritter Zusatz.

178. Bey einer plötzlichen, ungestümen Veränderung ist das Quadrat von U, oder U^2 jederzeit positiv, der Werth U für die verlohrne Geschwindigkeit mag positiv oder negativ seyn. Es ist also $\overline{\text{Sum. } MU^2}$ jederzeit eine positive Grösse, eben so wie $\overline{\text{Sum. } MW^2}$ und $\overline{\text{Sum. } MV^2}$; mithin ist vermöge der Gleichung (G) (175.) $\overline{\text{Sum. } MW^2}$ allezeit grösser, als $\overline{\text{Sum. } MV^2}$; d. h. die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße ist dann allezeit kleiner, als vor demselben. Es findet also allezeit bey dem Stoße harter Körper, er geschehe nun unmittelbar, oder werde durch irgend eine Maschiene ohne Federkraft bewerkstelliget, ein Verlust an lebendigen Kräften Statt; und dieser Verlust an lebendigen Kräften ist stets gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche da seyn würde, wenn sich jeder der Körper ungehindert mit einer, seiner, durch den Stoß verlohrnen, gleichen Geschwindigkeit bewegte. Ich

werde diesen Grundsatz das Gesetz des Verlustes an lebendigen Kräften beym Stoße harter Körper, nennen.

Dreyzehnter Lehrsatz.

179. Bey dem Stoße von vollkommen elastischen Körpern, es seyen so viel ihrer wollen, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach dem Stoße jederzeit gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche vor demselben Statt hatten.

Denn die Wirkung der Elasticität bringt es mit sich, daß die Größe der Bewegung, welche jeder Körper des Systems jedem andern giebt, verdoppelt wird, d. h. MU wird für jeden Körper des Systems das Doppelte von dem, was es bey harten Körpern seyn würde. Aber die Richtung dieser verlohrnen Bewegungsgröße ändert sich nicht, weil sie der aus allen, dem M eingedrückten Kräften resultirenden jederzeit gleich und gerade zu entgegengesetzt ist, und, da sich alle diese Kräfte zu gleicher Zeit verdoppelten, die Richtung ihrer Resultirenden sich nicht geändert haben kann; der Winkel $U^\wedge W$ ist also derselbe, wie bey harten Körpern. Nun halten wir für harte Körper (173.)

$$\underline{\text{Sum.}}\ MUW.\ \cos.\ W^\wedge U - \underline{\text{Sum.}}\ MU^2 = 0.$$

Angenommen also, daß, wenn die Körper vollkommen elastisch sind, die verlohrne Geschwindigkeit U^{I}, und die übrig gebliebene V^{I} sey, W aber dieselbe bleibt, so wird U^{I} das Doppelte von U, folglich $U = \frac{1}{2} U^{I}$ seyn; mithin wird die Formel für vollkommen elastische Körper, wenn man alles mit 4 multiplicirt, diese seyn:

$$2 \, \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I}W. \cos. W^{\wedge}U^{I} - \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I2} = 0 \; (H).$$

Daraus wird, weil $W. \cos. W^{\wedge}U^{I} = V^{I} \cos. V^{I\wedge}U^{I} + W^{I}$ ist,

$$2 \, \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I}V^{I}. \cos. V^{I\wedge}U^{I} + \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I2} = 0 \; (H^{I}).$$

Aber da andern Theils W immer das Resultirende von V^{I} und U^{I} war (175.), so erhält man:

$$W^{2} = V^{I2} + U^{I2} + 2 \, V^{I}U^{I} \cos. V^{I\wedge}U^{I},$$

und folglich:

$$\underline{\text{Sum.}} \; MW^{2} = \underline{\text{Sum.}} \; MV^{I2} + \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I2} + 2 \, \underline{\text{Sum.}} \; MU^{I}V^{I} \cos. V^{I\wedge}U^{I}.$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen (H^{I}), so erhält man, wenn man sie reducirt:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MW^2 = \underline{\text{Sum.}}\ MV^{\prime 2}; \text{ — } (H^{II})$$

welches der algebraische Ausdruck des Satzes ist, welcher zu beweisen war.

Vierter Zusatz.

180. Wenn die Körper nicht vollkommen elastisch, aber doch alle von einer gleichen Elasticität n, d. h. von einer solchen sind, daß statt der Verdoppelung der wechselseitigen Einwirkung der Körper, wie dieser Fall bey vollkommen elastischen Körpern eintritt, dieselbe Kraft bloß mit n multiplicirt würde: so ist es offenbar, daß die Richtung jeder der verlohrnen Geschwindigkeiten immer noch dieselbe seyn würde, eben so wie der Winkel $W^{\wedge}U$.

Dieß angenommen, so haben wir für harte Körper (173.)

$$\underline{\text{Sum.}}\ MUW.\ \cos.\ W^{\wedge}U - \underline{\text{Sum.}}\ MU^2 = 0.$$

Für den Fall also, in welchem der Grad von Elasticität durch n ausgedrückt ist, mag die verlohrne Geschwindigkeit U^I, die noch übrig gebliebene aber V^I seyn, so bekommt man

$$U^I = nU, \text{ oder } U = \frac{1}{n}\ U^I.$$

Multiplicirt man nun die vorige Formel mit $\underline{n}$, so giebt dieß

$$\underline{n.\,\mathrm{Sum.}}\; MU'W \cos.\, W^\wedge U' - \underline{\mathrm{Sum.}}\; MU'^2 = o.$$

Weil aber

$$W.\, \cos.\, W^\wedge U' = V' \cos.\, V^\wedge U' + U',$$

so wird aus diesen Gleichungen

$$\underline{\mathrm{Sum.}}\; MV'U' \cos.\, V'^\wedge U' + \left(\frac{n-1}{n}\right) \underline{\mathrm{Sum.}}\; MU'^2 = o. \quad (H'')$$

Aber da andern Theils W immer das Resultirende aus V' und U' war, so muß dieß geben (175.)

$$W^2 = V'^2 + U'^2 + 2\, V'U' \cos.\, V'^\wedge U';$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}\,\underline{\mathrm{Sum.}}\; MW^2 = \tfrac{1}{2}\,\underline{\mathrm{Sum.}}\; MV'^2 + \tfrac{1}{2}\,\underline{\mathrm{Sum.}}\; MU'^2 + \underline{\mathrm{Sum.}}\; MV'U'.\, \cos.\, V'^\wedge U';$$

Addirt man diese Gleichung zu der vorigen (H''), und reducirt, so bekommt man:

$$\underline{\mathrm{Sum.}}\; MW^2 = \underline{\mathrm{Sum.}}\; MV'^2 - \frac{n-2}{n}\, \underline{\mathrm{Sum.}}\; MU'^2. \quad (H''')$$

Für den Fall der vollkommnen Elasticität ist $n = 2$; alsdann wird das letzte Glied der Gleichung 0, und die Gleichung selbst reducirt sich auf:

$$\underline{\text{Sum.}}\ MW^2 = \underline{\text{Sum.}}\ MV'^2,$$

wie im vorigen Zusatz.

Für harte Körper ist $n = 1$; und dann reducirt sich also die Gleichung auf

$$\underline{\text{Sum.}}\ MW^2 = \underline{\text{Sum.}}\ MW'^2 + \underline{\text{Sum.}}\ MU'^2,$$

wie oben (175.)

Vierzehnter Lehrsatz.

181. Wenn irgend ein System harter Körper, die unter einander in unmittelbarer Berührung stehen, oder an irgend einer Maschiene ohne Federkraft angebracht sind, einen Stoß bekömmt, und man im Augenblicke, wo der Stoß geschehen will, die Bewegung, mit welcher sich das System bewegen will, in zweye zerlegt, deren eine die zu zerstörende ist; so ist die andere von der Art, daß, wenn man sie allein mit einemmale aufhebt, und ihr irgend eine andere geometrische Bewegung substituirt, so

M

wird die Summe der Producte aus der von jedem Körper des Systems verlohrnen Quantität von Bewegung, multiplicirt durch seine geometrische Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser Quantität von Bewegung geschätzt, = o seyn.

Denn (158.) vermöge der eben angegebenen Substitution wird diese neue geometrische Bewegung diejenige seyn, welche wirklich nach dem Stoße Statt haben mußte. Man könnte also die Bewegung, mit welcher sich das ganze System zu bewegen strebt, als zusammengesetzt ansehen aus dieser neuen und der zerstörten Bewegung; und daher auch auf diese zusammengesetzte Bewegung dieselben Schlüsse anwenden, welche oben für den Fall aufgestellt warden, wenn die Bewegung, mit welcher sich das System zu bewegen strebt, aus der, welche wirklich Statt finden, und der, welche aufgehoben werden sollte, zusammengesetzt war. Nun aber ist diese Bewegung, welche vor der Substitution aufgehoben werden sollte, dieselbe mit der, die auch nach der Substitution noch aufgehoben werden soll, weil die substituirte Bewegung, als eine geometrische, nichts an der wechselseitigen Einwirkung der Körper ändert. Folglich muß man aus demselben Grunde, aus welchem man die Gleichung (F) (169.) bekam:

Sum. $MUu. \cos. U\hat{\ }u = o$ (J) erhalten, wenn man u die geometrische, für V substituirte Geschwindigkeit nennt; und diese Formel ist nichts anderes, als der algebraische Ausdruck des Satzes, welcher bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

182. Wenn der Stoß Gleichgewicht in dem Systeme hervorbringen soll, dann wird man bekommen: $V = 0$, und $U = W$, aus der vorigen Formel wird also:

$$\underline{\text{Sum.}}\ M.\ Wu.\ \cos.\ W\hat{\ }u = 0;\ (J')$$

und diese Gleichung müßte im Fall des Gleichgewichts, oder dem, der allgemeinen Aufhebung der Bewegungen Statt haben, die dem Systeme mitgetheilte geometrische Bewegung sey, welche sie wolle.

Zweyter Zusatz.

183. Die oben gefundene Formel (J) kann eine andere Gestalt annehmen; denn da W das Product von V und U, so muß dieß geben:

$$U \cos.\ U\hat{\ }u = W.\cos.\ W\hat{\ }u - V.\cos.V\hat{\ }u.$$

Substituirt man in die Gleichung (J) diesen Werth von $U.\cos.\ U\hat{\ }u$, so erhält man:

$$\underline{\text{Sum.}}\, MWu.\cos.W''u - \underline{\text{Sum.}}\, MVu.\cos.V''u = 0; \quad (J^{II})$$

und dieser Ausdruck reducirt sich, im Fall des Gleichgewichts, wie der vorige (J^{I}) auf:

$$\underline{\text{Sum.}}\ M.\,Wu.\cos.W''u = 0.$$

Dritter Zusatz.

184. Den Gleichungen (F) (F^{I}) (F^{II}) (J) (J^{II}) kann man auch noch eine andere Gestalt geben, die wegen der, von den Geometern erfundenen, Methode, die Bewegungen eines Systems von Körpern überhaupt auf 3, unter sich senkrechte Achsen zu beziehen, sehr merkwürdig ist; und dieß giebt den Auflösungen ein artiges und einfaches Ansehen, wie dieß schon oben bemerkt worden.

Wir wollen uns also im Raume drey unter sich senkrechte Achsen beliebig vorstellen, und denken, daß jede der Geschwindigkeiten W, V, U, u, in drey andere mit diesen Achsen gleichlaufende, zerlegt sey. Nennen wir die

dem	W	correspond.	Geschwindigk.	W^{I},	W^{II},	W^{III},
„	V	„	„	V^{I},	V^{II},	V^{III},
„	U	„	„	U^{I},	U^{II},	U^{III},
„	u	„	„	u^{I},	u^{II},	u^{III}.

Dieß vorausgesetzt, werden, nach meiner Behauptung, die Gleichungen (F) (F^{I}) (F^{II}) (J) (J^{II}) folgende Gestalten annehmen; zur Abkürzung werde ich für den Ausdruck: $\overline{\text{Sum.}}$ bloß das gewöhnliche Integrationszeichen $\int$ substituiren,

$$\int MU^{I}V^{I} + \int MU^{II}V^{II} + \int MU^{II}V^{III} = 0 \quad (f)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int MW^{I}V^{I} + \int MW^{II}V^{II} + \int MW^{II}V^{III} \\ = \int MV^{I\,2} + \int MV^{II\,2} + \int MV^{III\,2} \end{array}\right\} = 0 \quad (f^{I})$$

$$\left.\begin{array}{l} \int MU^{I}W^{I} + \int MU^{II}W^{II} + \int MU^{II}W^{III} \\ = \int MU^{I\,2} + \int MU^{II\,2} + \int MU^{III\,2} \end{array}\right\} = 0 \quad (f^{II})$$

$$\int MU^{I}u^{I} + \int MU^{II}u^{II} + \int MU^{III}u^{II} = 0 \quad (i)$$

$$\left.\begin{array}{l} \int MW^{I}u^{I} + \int MW^{II}u^{II} + \int MW^{III}u^{III} \\ = \int MV^{I}u^{I} + \int MV^{II}u^{II} + \int MV^{III}u^{III} \end{array}\right\} = 0 \quad (i^{II}).$$

Diese Ausdrücke gelten für alle mögliche Fälle des Gleichgewichts und der Bewegung in einem Systeme harter Körper, sie mögen nun unmittelbar auf einander einwirken, oder durch Vermittelung irgend einer Maschiene ohne Federkraft.

Der Beweis dieser Formeln folgt augenscheinlich aus dem sehr bekannten Satze der Geometrie, nämlich: daß das Product jeder zweyer geraden Linien, die von einem gegebenen Puncte aus im Raume gezogen werden, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie einschließen, gleich ist der Summe der drey Producte, welche sich ergeben, wenn man die beyden Projectionen dieser geraden Linien auf jeder der drey Achsen mit einander multiplicirt. Hieraus folgt z. B. daß

$$UV. \cos. U''V = U'V' + U''V'' + U'''V''';$$

und so auch mit den übrigen.

Funfzehnter Lehrsatz.

185. Unter allen Bewegungen, deren ein System vollkommen harter Körper fähig ist, welche durch einen unmittelbaren Stoß, oder durch Maschienen ohne Federkraft so auf einander wirken, daß dadurch in dem ganzen Systeme eine gewaltsame Veränderung entsteht; unter allen diesen Bewegungen ist diejenige, welche nach der Einwirkung wirklich Statt finden wird, die geometrische, welche von der Art ist, daß die Summe der Producte jeder Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, welche sie verliehrt, ein Minimum ist. Das heißt, geringer als die Summe der Producte von jeder der Massen in das Quadrat der Geschwindigkeit, welche sie verlohren haben würde, wenn das System irgend eine andere geometrische Bewegung angenommen hätte.

Es drücke also M jede Masse des Systems aus, W ihre Geschwindigkeit vor, V die nach dem Stoße, U die durch den Stoß verlohrne Geschwindigkeit, und u irgend eine geometrische Geschwindigkeit; so ist zu beweisen, daß $\int MU^2$ geringer sey, wenn M nach dem Stoße die Geschwindigkeit V, als wenn es die Geschwindigkeit u annähme, oder daß $\delta . \int MU^2 = 0$, wo δ das Variationszeichen ist, wenn man für V eine geometrische Geschwindigkeit u substituirt, die von der ersten unendlich wenig differirt.

Wir wollen also wirklich V in zwey andere Geschwindigkeiten zerlegen, deren eine u, die andere u^{I} sey; da nun V und u, beydes geometrische sind, so wird es auch u^{I} seyn (152.), wir erhalten folglich (181.),

$$\int M U u^{I} \cos. U^{\wedge}u^{I} = 0 \ (a)$$

Eben so wollen wir die verlohrne Geschwindigkeit U in zwey andere zerlegen, deren eine U^{I} die Geschwindigkeit ausdrücken mag, welche der Körper M verliehren würde, wenn er nach dem Stoße, statt der Geschwindigkeit V, die Geschwindigkeit u annehmen wollte; so sage ich, die andere wird der u^{I} gleich und im Diameter entgegengesetzt seyn. Denn wenn man diese Geschwindigkeit u^{II} nennt, und (Fig. 23.) W durch $\overline{mW}$, V durch $\overline{mV}$, U durch $\overline{mU}$, u durch $\overline{mu}$, u^{I} durch $\overline{mu^{I}}$, und endlich u^{II} durch $\overline{mu^{II}}$ ausdrückt; so werden die Figuren $mVWU$, $muWU^{I}$, $muVu^{I}$, und $mU^{I}Uu^{II}$ vier Parallelogramme seyn, deren Diagonalen $\overline{mW}$, $\overline{mW}$, $\overline{mV}$, und $\overline{mU}$

sind; dieß ist unmöglich, wenn nicht $\overline{m u''} = \overline{UU'} = \overline{uV} = \overline{mu'}$. Hieraus folgt, daß $\overline{mu''} = \overline{mu'}$, d. h. $u'' = u'$; und wenn nicht überdieß diese beyden Größen einander im Diameter entgegengesetzt wären.

Dieß vorausgesetzt, ist in dem Dreyeck mUU':

$$\overline{UU'} \cos. UU'm = \overline{mU'} - \overline{mU} . \cos. UmU',$$

und weil der Winkel UmU' unendlich klein, folglich sein Cosinus von Eins nur um eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschieden ist, so wird daraus:

$$\overline{UU'} \cos. \overline{UU'm} = (\overline{mU'} - \overline{mU}).$$

Nun aber ist $(\overline{mU'} - \overline{mU})$ die Größe, um welche U variirt, wenn der Körper M statt V die Geschwindigkeit u annimmt; folglich $(\overline{mU'} - \overline{mU}) = \partial U$; mithin wird aus jener Gleichung

$$\overline{UU'} \cos. UU'm = \partial U, \text{ oder } u' \cos. U''u' = \partial U.$$

Substituirt man diesen Werth von $u' \cos. U''u'$ in die oben gefundene Gleichung (a) so erhält man:

$$\int MU\,\delta U = 0 \text{ oder } \delta \int MU^2 = 0; \quad (K)$$

welches der algebraische Ausdruck des aufgestellten Satzes ist.

Bekanntlich zeigt die Gleichheit der Differentiale oder der Variation einer Größe mit Null, nicht immer ein Minimum an, sondern sie kann auch ein Maximum, ja bisweilen sogar einen Zustand des Systems anzeigen, welcher weder ein eigentliches sogenanntes Minimum, noch Maximum ist. Der vorige Satz muß also mit der gewöhnlichen Einschränkung verstanden werden; aber die Formel (K) selbst drückt ohne Ausnahme das allgemeine Gesetz des Stoßes harter Körper aus.

186. Es ist dieß eine schöne Formel, indem sie allein hinreicht, die Bewegung eines Systems von harten Körpern nach dem Stoße zu bestimmen, wenn man diejenige kennt, welche vor demselben Statt hatte, der Stoß mochte sich nun unmittelbar, oder mittelst einer Maschiene ohne Federkraft äußern, weil sie zuförderst zeigt, daß die Bewegung geometrisch seyn muß, und dann unter allen diesen Bewegungen diejenige bestimmt, welche Statt finden muß.

Es mögen z. B. zwey Kugeln A und B unter einer schrägen Richtung auf einander stoßen, und man wollte ihre Bewegungen nach dem Stoße wissen.

Angenommen, daß die Geschwindigkeit A, beurtheilt nach der Richtung von $\overline{AB}$, der Linie zwischen den beyderseitigen Mittelpuncten, vor dem Stoße a, und nach demselben α sey; daß die von B, nach derselben Richtung geschätzt, vor dem Stoße b, und nach ihm β sey; daß ferner die von A, senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße a^1 und nach demselben α^1 sey, und daß endlich die von B, ebenfalls senkrecht auf dieser Mittelpunctslinie geschätzt, vor dem Stoße b^1 und nach ihm β^1 sey; so muß, da vermöge unsers Satzes die Bewegung geometrisch seyn muß, so fort $\alpha = \beta$ seyn. Also wird die für A nach $\overline{AB}$ verlohrne Geschwindigkeit $a - \alpha$, und die für B in derselben Richtung verlohrne Geschwindigkeit $b - \beta$, oder $b - \alpha$ seyn.

Ferner wird in der Richtung, welche auf der Mittelpunctslinie senkrecht steht, die von A verlohrne Geschwindigkeit $= a^1 - \alpha^1$, und die von B verlohrne $= b^1 - \beta^1$ seyn; mithin die von A und B verlohrnen Totalgeschwindigkeiten:

$$\sqrt{(a-\alpha)^2 + (a^1-\alpha^1)^2} \text{ u. } \sqrt{(b-\alpha)^2 + (b^1-\beta^1)^2}$$

Man bekommt also, vermöge des Lehrsatzes:

$$\delta.(A\,[(a-\alpha)^2 + (a^1-\alpha^1)^2]) + B\,[(b-\alpha)^2 + (b^1\beta^1)^2] = 0, \text{ oder}$$

$$(Aa - A\alpha)\,\delta\alpha + (Bb - B\alpha)\,\delta\alpha + (Aa^1 - A\alpha^1)\,\delta\alpha^1 + (Bb^1 - B\beta^1)\,\delta\beta^1 = 0,$$

eine Gleichung, in welcher die Variationen $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, schlechterdings von einander unabhängig sind, und dieß kann nicht anders Statt finden, als wenn der Coefficient einer jeden o ist.

Man erhält also diese drey Gleichungen:

$$\frac{Aa + Bb}{A + B} = \alpha, \quad a' = \alpha', \quad b' = \beta'.$$

Und dieß war es, was bewiesen werden sollte.

187. Dieses Gesetz erstreckt sich, mit den gehörigen Modificationen, auf die Stöße, welche in einem System vollkommen harter, oder auch mit irgend einer beständigen, d. h. für alle Körper des Systems gleichen, Elasticität begabter Körper Statt haben können.

Denn wenn wir voraussetzen, daß U' alsdann die durch M verlohrne Geschwindigkeit ausdrücke, so erhält man für den Fall vollkommner elastischer Körper $U' = 2U$, und im allgemeinen für irgend einen, durch n ausgedrückten Grad der Elasticität $U' = nU$, oder $U = \frac{1}{n}U'$. Dieser Werth in die Gleichung $\delta \int MU^2 = o$ substituirt, giebt $\delta \int \frac{1}{n^2} MU'^2 = o$. Wenn also n eine constante Größe, oder dieselbe für alle Körper ist, so erhält man: $\frac{1}{n^2} \delta \int M U'^2 = 0$ oder $\delta \int M U'^2 = 0$.

Somit gilt dieser Ausdruck für alle Systeme von Körpern, deren Elasticität dieselbe ist.

Doch bemerke man, daß, da alsdann U zu nU wird, der Körper M mit dieser Geschwindigkeit nU, weniger der Geschwindigkeit U, in entgegengesetzter Richtung zurückspringt. Folglich ist die Geschwindigkeit, mit welcher er zurückspringt, $(n - 1)$ U; und mithin verhält sich die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße zur relativen vor demselben, wie $n - 1 : 1$; d. h. die Formel $\delta \int M U^2 = 0$ wird immer gelten, aber die Variation muß mit hinzugezogen werden, in der Voraussetzung, daß die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße gleich sey der relativen vor demselben, multiplicirt mit $n - 1$, und in entgegengesetzter Richtung genommen.

Folglich muß bey harten oder weichen Körpern, d. h. wenn $n = 1$, die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße als Null, oder, was auf eins hinauskommt, die Bewegung muß als eine geometrische angenommen werden. Sind die Körper vollkommen elastisch, d. h. ist $n = 2$, so muß die relative Geschwindigkeit nach dem Stoße der relativen vor demselben als gleich und in entgegengesetzter Richtung angenommen werden; eben so bey den übrigen.

188. Wenn man annimmt, daß jeder Körper M während einer gegebenen Zeit t den Raum X mit der Geschwindigkeit U durchlaufen habe, so erhält man $U = \frac{X}{t}$. Mithin kann man die Formel durch die Division mit t, welches für alle Körper dasselbe ist, in folgende Gestalt verwandelt werden, $\delta \Gamma MUX = 0$.

Maupertuis nennt in seinem Versuche einer Kosmologie Wirkungsgröße (17.) das Product einer Masse durch ihre Geschwindigkeit und ihren durchlaufenen Weg. Mithin ist MUX eine Wirkungsgröße, woraus das als Grundsatz hervorgeht: daß diejenige Größe, welche zur Hervorbringung einer Veränderung in der Bewegung der Körper erfordert wird, jederzeit ein Minimum sey. Dieser Grundsatz ist als der Ausdruck von dem anzusehen, wofür die vorhergegangene Gleichung der algebraische Ausdruck ist. — Maupertuis gründet dieses Prinzip auf die Endursachen; da aber diese einer willkührlichen Auslegung unterworfen sind, und man sie alles sagen läßt, was einem beliebt, so könnte man keinen strengen Schluß aus ihm ziehen, wenn man es nicht durch einen mathematischen Beweis unterstützte.

Maupertuis hat bewiesen, daß sein Prinzip beym unmittelbaren Stoße zweyer freyen, vollkommen harten Körper wirklich gelte; eben so bey zwey vollkommen elastischen Körpern; aber darüber hinaus ist er nicht gekommen, und was die plötzlichen Veränderungen betrifft, so ist sein, wie wohl sehr schönes Prinzip, weder durch ihn, noch durch andere Geometer für diese begründet worden: zum wenigsten weiß ich nicht, daß jemand den allgemeinen Beweis vor der ersten Ausgabe dieses Werks unternommen hätte, wo ich das gleichgeltende, oben angegebene (185.) Prinzip, aber nur für harte Körper festsetzte. Der so eben von mir aufgestellte Beweis ist viel allgemeiner, weil er auch die Körper von verschiedenen Graden der Elasticität umfaßt; aber er bestätigt auch zugleich die Unhaltbarkeit derer, welche man auf die Endursachen gründen wollte, indem er zeigt, daß das Prinzip nicht allgemein, sondern auf den Fall eingeschränkt ist, wenn alle Körper des Systems denselben Grad der Elasticität besitzen. Uebrigens glaube ich, daß der Lehrsatz, wie ich ihn aufgestellt habe (185.), einfacher und leichter, als der von der kleinsten Wirkung, anzuwenden ist, zu welchen letzteren man unnöthiger Weise den durchlaufenen Raum mit hinzuzieht. Allein es ist nicht minder wahr, daß nach der so eben gegebenen Erklärung in dem Maupertuis'schen Prinzip nichts mehr unbestimmt bleibt, und daß es streng und mathematisch erwiesen ist.

Sechzehnter Lehrsatz.

189. Wenn auf irgend ein System von Körpern, sie mögen hart seyn oder nicht, mögen unmittelbar oder durch irgend eine Maschiene, mit oder ohne Federkraft auf einander einwirken, vorausgesetzt nur, daß das Zusammenpressen und Wiederherstellen in einem untheilbaren Augenblicke zusammentreffe; wenn auf ein solches System ein Stoß, oder irgend eine Einwirkung unter den verschiedenen Theilen desselben geschieht, und man diesem System in dem Augenblicke, wo sich der Stoß äussern will, außer der Bewegung, mit welcher es sich zu bewegen strebt, noch eine andere, geometrische Bewegung giebt, so wird für den ersten Augenblick der Bewegung an der wechselseitigen Einwirkung der Körper alles unverändert bleiben, und die Summe der Producte aus der von jedem unter ihnen verlohrnen Bewegungsgröße, durch seine geometrische Geschwindigkeit multiplicirt, und in der Richtung dieser Bewegungsgröße geschätzt, = 0 seyn.

Denn vermöge der dem System mitgetheilten geometrischen Bewegung, werden die Körper, welche auf einander einwirken, sich weder einander nähern, noch von einander entfernen wollen. Es wird in der Stärke des wechselseitigen Einwirkens dieser Körper alles Anfangs unverändert bleiben; da nun die wechselseitigen Einwirkungen sich einander aufheben, weil man die Wiederherstellung der etwanigen Körper mit Federkraft als in einem untheilbaren Zeittheile geschehen, annimmt, so ist es klar, daß, wenn alle Theile des Systems hart wären, und es nur allein durch die sich einander aufhebenden Bewegungen belebt würde, Gleichgewicht seyn müßte. Mithin (168.) würde die Summe der Producte aus der von jeder Masse verlohrnen Bewegungsgröße, multiplicirt mit ihrer geometrischen Geschwindigkeit, und geschätzt in der Richtung dieser Bewegungsgröße, = 0 seyn.

Allein diese Größen der Bewegung sind, wie man so eben gesehen, dieselben, welche sich im angenommenen Systeme einander zerstören, wenn auch die Theile nach der Voraussetzung nicht als hart angesehen wurden; und die geometrischen Geschwindigkeiten sind ebenfalls dieselben in beyden Fällen. Mithin ist im ersten, wie im zweyten Falle, die Summe der Producte aus der von einer jeden Masse verlohrnen Bewegungsgröße in ihre Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser Bewegungsgröße geschätzt, = 0. Dieß war zu beweisen.

Zusatz.

190. Somit gilt die für die harten Körper gefundene Formel (181.) $\int MUu \cos. U^{\wedge}u = 0$, gleichfalls für alle Arten von Körpern, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen. Nur das Gesetz des Verlustes an lebendigen Kräften (178.) zeichnet die harten Körper aus, indem es für die elastischen nicht Statt findet. Bey vollkommen elastischen Körpern giebt es keinen Verlust an lebendigen Kräften; ist die Elasticität unvollkommen, so ist der Verlust bald größer, bald geringer. Die vollkommen harten Körper auf der einen, die vollkommen elastischen auf der andern Seite, bilden die Grenzen, zwischen welche alle die übrigen fallen. Aber alle haben eine gemeinschaftliche Eigenschaft, welche durch die Formel $\int MUu. \cos. U^{\wedge}u = 0$ ausgedrückt ist; welche Formel, indem sie dem u successive alle Werthe beylegt, die es nur haben kann, ganz allein für sich alle die zur Lösung der Aufgabe erforderlichen Gleichungen giebt, die ausgenommen, welche aus der Beschaffenheit der Körper herfließen und sie von einander unterscheiden, wohin z. B. für die harten Körper die Gleichung

$$\int MUV \cos. U^{\wedge}V = 0$$

oder $\int MW^2 = \int MV^2 + \int MU^2$;

und für die vollkommen elastischen Körper die Gleichung:

$\int MW^2 = \int MV^2$ gehört.

Siebenzehnter Lehrsatz.

191. Wenn auf ein vollkommen freyes System von Körpern, sie mögen außerdem hart, weich oder elastisch seyn, ein Stoß geschieht, so ist:

1) Die Summe der von allen Körpern des Systems verlohrnen Bewegungsgrößen, wenn man sie nach irgend einer Richtung nach dem Stoße schätzt, = 0.

2) Die Summe der Bewegungsgrössen, welche irgend eine Anzahl von Körpern des Systems, nach einer gegebenen Richtung verlohren haben, gleich der Summe der Bewegungsgrößen, welche alle übrige Körper des Systems in derselben Zeit und in derselben Richtung gewonnen haben.

3) Die Totalgröße der Bewegung des Systems, nach irgend einer Richtung geschätzt, bleibt dieselbe, die sie vor dem Stoße war.

1) Da, nach der Voraussetzung, das System vollkommen frey ist, und es mithin weder fixe Puncte, noch irgend ein anderes Hinderniß giebt, so kann man wirklich dem ganzen Systeme eine

gemeinschaftliche Bewegung nach der gegebenen Richtung mittheilen, und dieß muß eine geometrische seyn (173.), weil sie nichts an den relativen Geschwindigkeiten, mithin auch nichts in der wechselseitigen Einwirkung der Körper ändert. Es sey also u die geometrische Geschwindigkeit, welche für jeden Körper M aus dieser gemeinschaftlichen Bewegung entspringen wird; und diese Geschwindigkeit u wird dieselbe seyn für alle Körper des Systems. Mithin wird sich die oben (181.) gefundene Formel

$$\int M U u. \cos. U\hat{}u = 0,$$

wenn man mit u dividirt, auf

$$\int M U \cos. U\hat{}u = 0$$

reduciren, welches augenscheinlich der algebraische Ausdruck des ersten Theiles unsers Lehrsatzes ist.

2) Da die durch einen Körper verlohrne Bewegungsgröße gleich ist der Größe der Bewegung, welche derselbe Körper in der entgegengesetzten Richtung gewonnen hat, so ist offenbar, daß die Größe $\int M U. \cos. U\hat{}u$ eins ist mit der Summe der Größen der Bewegung, welche durch irgend eine Anzahl von Körpern des Systems nach der Richtung u verlohren haben, weniger der Summe der Größen der Bewegung, die alle übrige nach der nämlichen Richtung gewonnen haben; und dieß ist augenscheinlich der zweyte Theil unsers Satzes.

3) Endlich, weil W die resultirende aus V und U ist, so hat man:

$$U \cos. U^{\wedge}u = W \cos. W^{\wedge}u - V \cos. V^{\wedge}u.$$

Substituirt man diesen Werth von U cos. $U^{\wedge}u$ in die vorige Gleichung, und versetzt sie, so giebt dieß

$$\int MW \cos. W^{\wedge}u = \int MV \cos. V^{\wedge}u.$$

und dieß ist offenbar der Ausdruck für den dritten Theil unsers Satzes.

Zusatz.

192. Wir haben gesehen (152.) daß die Geschwindigkeit des Schwerpunctes nach irgend einer Richtung geschätzt, jederzeit gleich ist der Summe der Größen der Bewegung aller Theile des Systems, nach derselben Richtung geschätzt, durch die ganze Masse des Systems dividirt. Vermöge des dritten Theils im vorhergehenden Satz also wird die Geschwindigkeit des Schwerpunctes bey einem vollkommen freyen Systeme von Körpern nach irgend einer beliebigen Richtung geschätzt, durch den Stoß der Körper nicht verändert, diese mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, d. h. sie mögen hart, weich, oder bis auf einen gewissen Grad elastisch seyn.

Achtzehnter Lehrsatz.

193. Wenn auf ein vollkommen freyes System von Körpern, die von beliebiger Beschaffenheit seyn können, ein Stoß geschieht, so ist:

1) die Summe der Momente des Umschwunges der von allen Körpern des Systems verlohrnen Größen der Bewegung, in Bezug auf eine im Raume beliebig angenommene Achse, um welche diese Bewegungen in gleicher Richtung sich zu drehen strebten, gleich Null.

2) Die Summe der Momente des Umschwunges der von einer Anzahl von Körpern des Systems in einer gegebenen Richtung um diese Achse verlohrnen Größen der Bewegung, ist gleich der Summe der Momente der von allen übrigen Körpern des Systems in gleicher Zeit und in derselben Richtung um diese Achse gewonnenen Größen der Bewegung. —

3) Die Summe der Momente des Umschwunges der nach dem Stoße wirklich thätigen Bewegungsgrößen in einer gegebenen Richtung um die Axe, bleibt dieselbe, die sie vor dem Stoße war.

1) Denn, da vermöge der Voraussetzung das System vollkommen frey ist, und es mithin weder feste Puncte, noch irgend ein anderes Hinderniß in demselben giebt, so kann man wirklich dem ganzen System eine Bewegung des Umschwunges um die gegebene Achse mittheilen, ohne etwas in der Stellung der Theile dieses Systems gegen einander zu verrücken, und diese Bewegung wird eine geometrische seyn (139.), weil sie nichts an den relativen Geschwindigkeiten verändert. Es sey also $\underline{u}$ die geometrische Geschwindigkeit, welche für jede Masse M aus dieser geometrischen Bewegung entspringt, und R der Radius ihrer Kreisbewegung, d. h. ihre Entfernung von der gegebenen Achse, so werden sich diese Geschwindigkeiten u offenbar unter einander verhalten, wie die Radien R, d. h. man wird $u = a R$ erhalten, wo a eine constante, oder für alle Körper des Systems die nämliche Größe ausdrückt. Aus der (181.) gefundenen Gleichung $\int M U u \cos. U^\wedge u = 0$, wird also:

$$a \int M U R \cos. U^\wedge \text{cir. } R = 0;$$

d. h. die Summe der Momente des Umschwunges der durch den Stoß um die gegebene Achse verlohrnen Bewegungsgrößen in der Richtung der mitgetheilten Bewegung muß = 0 seyn, und dieß war der erste Theil unsers Satzes.

2) Weil die durch einen Körper verlohrne

Größe der Bewegung gleich ist der durch denselben Körper in umgekehrter Richtung gewonnenen Bewegungsgröße, so ist augenscheinlich, daß die Größe $\int M U R \cos. U^{\wedge} \text{circ}. R$ eins ist mit der Summe der Momente der verlohrnen Bewegungsgrößen, in der Richtung der durch irgend eine Anzahl von Körpern des Systems mitgetheilten Rotationsbewegung genommen, weniger der Summe der Momente von Bewegungsgrößen, welche man in derselben Richtung durch alle übrige gewonnen hat, und es ist klar, daß dieß der zweyte Theil unsers Satzes war.

3) Endlich, weil W aus V und U resultirt, so erhält man (27.)

$$U \cos. U^{\wedge} \text{cir}. R = W \cos. W^{\wedge} \text{cir}. R. - V \cos. V^{\wedge} \text{cir}. R.$$

Substituirt man diesen Werth von $U \cos. U^{\wedge} \text{cir}. R.$ in die obige Gleichung, so wird aus dieser durch eine durchgängige Division mit a und Versetzung:

$$\int M W R \cos. W^{\wedge} \text{cir}. R = \int M V R \cos. V^{\wedge} \text{cir}. R.$$

und diese Formel ist offenbar der algebraische Ausdruck des dritten Theils jenes Satzes. Es war also bewiesen, was bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

194. Es ist klar, daß derselbe Beweis gelten würde, wenn das System, statt der vorausgesetzten vollkommnen Freiheit, sich um eine gegebene feste Achse bewegen müßte; denn alsdann würde man das Moment des Umschwunges auf diese Achsen beziehen, und so ebenfalls auf den obigen Ausdruck kommen. Doch würde dieser Ausdruck nur allein für diese Achse gelten können.

Zweyter Zusatz.

195. Wir wollen uns die von dem von jedem beweglichen Körper senkrecht auf die Achse des Umschwunges gezogenen Radius Vector beschriebene Ebene, oder vielmehr die Verzeichnung dieser Ebene auf irgend einer, auf dieser Achse senkrecht stehenden Fläche denken, d. i. den Flächenraum, welcher auf ihr zwischen zwey von dem Puncte, in welchem sie von der Achse geschnitten wird, nach den Projectionspuncten dieses Beweglichen gezogenen Radiis Vectoribus eingeschlossen ist. Nennt man ∂t das Zeitelement, und multiplicirt man damit die oben (193.) gefundene Gleichung, so giebt dies:

$$\int M W dt. R \cos. W' \text{cir}. R = \int M V dt. \cos. V'' \text{cir}. R.$$

Allein es ist klar, daß $W dt$ das Element des

Weges ist, welchen der bewegliche Körper M durchlaufen haben würde, wenn er frey gewesen wäre; und folglich ist

$$W\,dt \cos. W\hat{}\,cir.\ R.$$

der Weg nach der Richtung des Umkreises geschätzt, dessen Centrum der Punct ist, wo die Ebne von der Achse geschnitten wird, oder, was auf eins hinauskommt, der unendlich kleine Bogen zwischen den beyden Radiis Vectoribus, deren einer dem Anfang, der andre dem Ende des Augenblicks dt entsprechen würde. Aus demselben Grunde ist

$$V\,dt \cos. V\hat{}\,cir.\ R$$

der unendlich kleine Bogen, der zwischen den beyden Radiis Vectoribus eingeschlossen ist, welche, vermöge des Stoßes, der eine dem Anfang, der andere dem Ende des Augenblicks dt, wirklich entsprechen.

Dieß vorausgesetzt, so ist klar, daß diese Bogen, durch R multiplicirt, das zweyfache der zwischen von diesen Radiis Vectoribus eingeschlossenen respectiven Ebenen vorstellen. Folglich ist die Summe der Producte aus jeder Masse in die Fläche, welche ihr Radius Vector in einem unendlich kleinen Zeittheile durchstreicht, dieselbe, die sie ohne Stoß gewesen wäre; und da dasselbe für alle Zeittheile Statt findet, so kann man behaupten, daß, wie auch die auf ein freyes, oder sich um eine gegebene Achse zu bewegen genöthigtes System von Körpern geschehenden Stöße beschaffen seyn mögen, die Summe der Producte aus jeder Masse in die Fläche, welche ihr Radius Vector in einer auf dieser Achse senkrecht stehenden Richtung beschreibt, für irgend eine gegebene Zeit dieselbe sey, als wenn die Körper alle vollkommen frey geblieben wären. Man nennt dieses Gesetz das Prinzip der beschriebenen Ebenen (principe des aires). Es wurde von Arcy aufgefunden. Sichtlich läßt es sich als ein besonderer Fall auf den zurückbringen, wo sich die Bewegung in unmerklichen Graden verändert.

Neunzehner Lehrsatz.

196. Beym Stoße der Körper, sie mögen nun hart seyn oder nicht, und das Einwirken unmittelbar, oder mittelst einer jeden Maschiene mit oder ohne Federkraft geschehen, ist:

1) die Summe der Momente der Erschütterung aller Körper des Systems, in Rücksicht auf irgend eine geometrische Bewegung, = o.

2) Die Summe der Thätigkeitsmo-

mente aller Körper des Systems vor dem Stoße, in Rücksicht auf irgend eine geometrische Bewegung, gleich der Summe der Thätigkeitsmomente nach dem Stoße in Rücksicht auf dieselbe geometrische Bewegung.

Der erste Theil dieses Satzes ist augenscheinlich (67.) kein anderer, als der Ausdruck der oben (181.) aufgefundenen Formel

$$\int M\,U\,u.\ \cos.\ U\hat{}u = o.$$

Der zweite Theil ist augenscheinlich nur der Ausdruck (67.) der oben (183.) gefundenen Formel:

$$\int M\,W\,u\ \cos.\ W\hat{}u - \int M\,V\,u\ \cos.\ V\hat{}u = o \text{ oder}$$

$$\int M\,W\,u\ \cos.\ W\hat{}u = \int m\,V\,u\ \cos.\ V\hat{}u.$$

Q. E. D.

Sieht man den Druck als eine unendlich kleine Erschütterung an, so könnte man diesen Lehrsatz eben so gut auf die todten Kräfte anwenden, wie auf die sogenannten Bewegungsgrößen. Dann will dieß so viel sagen, daß der Zustand der Ruhe oder der Bewegung des Systems seyn möge, welcher er wolle, so wird doch die Summe der Momente des Drucks von allen Körpern des Systems in jedem Augenblicke, in Rücksicht aller und jeder geometrischen Bewegung, o seyn. Und dieß ist, eigentlich gesagt, nichts anders, als das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, nur anders ausgedrückt.

Zusatz.

197. Es giebt also, wie man aus dem zweyten Theile des vorigen Satzes ersieht, bey jeder Erschütterung oder mitgetheilten Bewegung, sie geschehe unmittelbar, oder durch irgend eine Maschiene, eine Größe, welche durch den Stoß nicht verändert wird. Diese Größe ist aber nicht, wie Descartes glaubte, die Summe der Größen der Bewegung: auch nicht die Summe der lebendigen Kräfte; denn diese erhält sich (177.) nur in dem Falle einer in unmerklichen Graden sich ändernden Bewegung, und nimmt allezeit ab (178.), wo Erschütterung Statt findet.

Ist das System ein freyes, so ist die Bewegungsgröße, nach irgend einer Richtung geschätzt, in der That eine und dieselbe vor und nach der Erschütterung; doch verhält sich dieß bey eintretenden Hindernissen nicht so, und eben so wenig bleiben dann die Momente der Bewegungsgrößen, die sich auf verschiedene Achsen (193.) beziehen, noch dieselben. Alle diese Größen erleiden eine Veränderung durch den Stoß, oder blei-den zum wenigsten nur in gewissen besondern Fällen unverändert.

Aber es giebt eine andere Gattung von Grössen, welche weder durch die verschiedenen, der Bewegung sich entgegensetzenden, Hindernisse, noch durch die, sie mittheilenden, Maschienen, noch durch die Härte, Weichheit, oder verschiedenen Grade der Elasticität der Körper, noch endlich durch die Stärke der Erschütterung, verändert werden können. Dieß ist der Thätigkeitsmoment des ganzen Systems, in Rücksicht auf jede geometrische Bewegung, deren es fähig ist.

Verbindet man nun dieses auf alle Körper anwendbare Gesetz wieder mit demjenigen, welches die besondere Beschaffenheit eines jeden charakterisirt, d. h. welches von der Eigenschaft eines harten, weichen oder elastischen Körpers abhängt, so wird man für jeden Fall alle zur Auflösung einer vorgelegten Frage erforderlichen Gleichungen haben.

Wenn der Stoß alle Bewegungen aufhübe, so hätte man $V = 0$: somit würde sich die (183.) gefundene Formel reduciren lassen auf:

$$\int m\, W\, u \cos. W^\wedge u = 0,$$

welches uns lehrt, daß dieser Fall eintritt, wenn der Thätigkeitsmoment des gänzlichen Systems unmittelbar vor dem Stoße 0 ist in Beziehung auf alle geometrische Bewegungen, deren er fähig ist.

Bemerkung.

198. Bis jetzt haben wir das betrachtet, was sich beym Stoße der Körper ereignet, dieser mochte sich unmittelbar oder durch Dazwischenkunft einer Maschiene mittheilen: und da von plötzlichen Veränderungen die Rede war, so brauchten wir keine Rücksicht auf die bewegenden Kräfte zu nehmen, welche nur in einem Verlaufe von Zeit eine wirkliche Bewegung hervorbringen können. Jetzt wollen wir den Zustand des Systems als in unmerklichen Graden sich verändernd betrachten, mithin müssen wir auch vom Effect der bewegenden Kräfte Rechenschaft geben.

Da man diese bewegende Kräfte als unendlich kleine, in jedem Augenblick mitgetheilte Grade von Bewegungsgrößen betrachten kann, so sind sie denselben Gesetzen unterworfen, welchen es die so eben betrachteten Bewegungsgrößen waren. Bringt man also an einem System von Körpern in Ruhe irgend eine bewegende Kraft an, wie z. B. wenn man ein bis zu einem gegebenen Augenblicke in Ruhe verharrendes System schwerer Körper mit einem Male den Einwirkungen der Schwere Preis giebt; so muß sich die allererste, überhaupt den Anfang machende, Bewegung, durch die für den Fall einer urplötzlichen Veränderung aufgefundenen Formel bestimmen lassen; weil die Veränderung, die erste Bewegung mag auch noch so klein seyn, doch wirklich in Beziehung auf den vorigen Zustand eine solche plötzliche ist, indem die Bewegung aus o in die Wirklichkeit tritt. Aber wenn die Bewegung einmal angefangen hat, so ist die für jeden Augenblick eintretende Veränderung, in Bezug auf die vorhergegangene Bewegung, unendlich klein, und zwar das Resultat der bewegenden Kräfte auf der einen, und der Kraft der Trägheit auf der andern Seite, welche vereint die augenblicklichen Zunahmen oder die Differentialen der Bewegungsgrößen geben. Man muß also auf diese bewegenden Kräfte Rücksicht nehmen, welche, da sie übrigens den nämlichen Gesetzen unterworfen sind, wie die endlichen Bewegungsgrößen, in der von uns noch zu untersuchenden Theorie einen besondern Fall von dem bilden, welchen wir eben im Allgemeinen für den Stoß der Körper bestimmt haben; da es nun aber darauf ankommt, für jeden Augenblick den veränderlichen Zustand des Systems zu betrachten, so erfordert diese Anwendung schlechterdings den Gebrauch der Infinitesimalgrößen.

Zwanzigster Lehrsatz.

199. **Wenn ein System harter Körper, welches frey oder an irgend eine Maschiene ohne Federkraft angekettet ist, und von lebendigen Kräften irgend einer Art bewegt wird, seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, und**

man für irgend einen Augenblick der Bewegung jedes Körpers des Systems mit m, seine Geschwindigkeit mit V, die bewegende Kraft mit P, die Geschwindigkeit, die es annehmen würde, wenn man die gegenwärtige Bewegung plötzlich wegdächte, und ihr irgend eine geometrische Bewegung substituirte, mit u, und endlich das Zeitelement mit dt bezeichnet, so erhält man folgende zwey Gleichungen;

$$SmVdV - SmVPdt\cos. V\hat{}P = 0 \ldots. \quad (M)$$
$$Smud(V\cos. u\hat{}V) - SmuPdt\cos. u\hat{}P = 0. \quad (N)$$

Denn 1) ist $Pdt \cos. V\hat{}P$ augenscheinlich die Geschwindigkeit, welche die bewegende Kraft P während dt, in der Richtung von V, in m hervorgebracht haben würde, wäre dieser Körper frey gewesen. Ferner ist dV die Geschwindigkeit, die er nach derselben Richtung, während der nämlichen Zeit wirklich erhält. Folglich ist $Pdt\cos. V\hat{}P - dV =$ die von m während dt nach der Richtung von V, vermöge des wechselseitigen Einwirkens der Körper auf einander verlohrne Geschwindigkeit. Diese Größe muß man also in der (169.) aufgefundenen Formel $SMUV\cos. U\hat{}V = 0$ für $U\cos. U\hat{}V$ setzen, so wie zugleich m für M. Aus dieser Gleichung wird mithin durch diese Substitution:

$$S\, m\, V\, A\, V - S\, M\, V\, P\, d\, t \cos. V^{\wedge}P = o.$$

Dieß war das erste, was bewiesen werden sollte.

2) $P\, dt \cos. u^{\wedge}P$ ist die Geschwindigkeit, welche die bewegende Kraft P, in m, während dt nach der Richtung von u hervorgebracht haben würde, wenn der Körper frey gewesen wäre. Ferner, da $V \cos. V^{\wedge}u$ die Geschwindigkeit von m nach der Richtung von u ist, so ist $d\,(V \cos. V^{\wedge}u)$ die, welche derselbe Körper in der Richtung von u, während dt gewinnt; folglich ist $P\, dt \cos. u^{\wedge}P - d\,(V \cos. V^{\wedge}u)$ die Geschwindigkeit, welche m während dt in der Richtung von u vermöge der gegenseitigen Wirkung der Körper auf einander verliehrt. Dieß ist also die Größe, die für $U \cos. U^{\wedge}u$ zu setzen ist, so wie zu gleicher Zeit m die für M in der (181.) gefundenen allgemeinen Formel $S\, M\, U\, u \cos. U^{\wedge}u = o$. Nun entsteht aber durch diese Substitution folgende Gleichung:

$$S\, m\, u\, d\,(V \cos. V^{\wedge}u) - S\, m\, u\, P\, dt \cos. u^{\wedge}P = o$$

Dieß war das zweyte, was bewiesen werden sollte.

Diese beyden Formeln (M) und (N) begreifen alle Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung in einem durch unmerkliche Grade sich verändernden System harter Körper. Sie sind, wie man sieht, äußerst einfach, und haben den Vorzug, daß sie nur Differentialen der ersten Ordnung enthalten.

Zusatz.

200. Ist Gleichgewicht vorhanden, so verschwinden die Glieder der Gleichung (M), so wie auch das erste der Gleichung (N). Mithin reducirt sich diese, wenn man überall mit dt dividirt, auf:

$$S\,m\,P.\ u\ \cos.\ u\hat{}P = 0 \qquad (N^{I})$$

welches das allgemeine Prinzip des Gleichgewichts in irgend einem Systeme bewegender Kräfte $m\,P$ ist.

Weil u hier jede mögliche geometrische Geschwindigkeit ausdrückt, und nach (161.) die virtuellen Geschwindigkeiten geometrische sind, so folgt, daß wir für u jede virtuelle Geschwindigkeit annehmen können.

Sodann kann auch $m\,P$ jede bewegende Kraft F vorstellen, und die Gleichung (N^{I}) also unter folgender Gestalt erscheinen:

$$S\,F.\ u\ \cos.\ u\hat{}F = 0, \qquad (N^{II})$$

wo u die virtuelle Geschwindigkeit von F ausdrückt. Nun aber ist klar, daß diese Formel der

Ausdruck für das famöse Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist. Wir werden darauf zurücke kommen (215. ff.).

Einundzwanzigster Lehrsatz.

201. **In jedem System von Körpern, deren Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, wächst die Summe der lebendigen Kräfte während einer gegebenen Zeit, um eine Größe, welche immer gleich ist dem Doppelten des, in derselben Zeit, durch alle bewegende Kräfte verzehrten oder consumirten Thätigkeitsmoments.**

Denn die (199.) gefundene Formel giebt, wie wir gesehen haben, wenn man nämlich ds das Element der durch m während dt beschriebenen Curve nennt, und nun integrirt:

$$S \int m P d s \cos. d s \hat{} P - \tfrac{1}{2} \int m V^2 + C = 0,$$

wo C eine constante, der halben Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte gleiche Größe ist. Mithin ist die Zunahme der lebendigen Kräfte, d. h.

$$\int m V^2 - 2 C = 2 S \int m P d s \cos. d s \hat{} P,$$

und diese Größe ist (63.) das während der Bewegung des Systems von allen bewegenden Kräften verzehrte Thätigkeitsmoment.

Zusatz.

202. Die Kraft der Trägheit von m, geschätzt nach der Richtung von V, ist:

$$= - m\frac{dV}{dt};$$

folglich ist der durch diese Kraft der Trägheit während dt aufgeriebene Thätigkeitsmoment $= m V dV$, mithin der durch dieselbe Kraft in demselben Augenblicke für das ganze System aufgeriebene Thätigkeitsmoment $= S\, m V dV$; also auch der durch dieselbe Kraft der Trägheit für die ganze Zeit der Bewegung und für das ganze System aufgeriebene Moment der Thätigkeit, wenn man das Integral ergänzt $= \frac{1}{2} \int m V^2 + C$. Da nun, vermöge der Formel (M), diese Größe weniger $S \int m P ds \cos. ds\hat{\ } P = 0$ ist, so folgt, daß diese letzte Größe gleich ist dem, durch die Kraft der Trägheit aller Theile des Systems, während der ganzen Dauer der Bewegung, aufgeriebenen Thätigkeitsmomente, d. h. also, das in einem System, welches seine Bewegung durch unmerkliche Grade verändert, durch alle bewegende Kräfte aufgeriebene Thätigkeitsmoment $S \int m P ds \cos. ds\hat{\ } P$, ist gleich dem in derselben Zeit durch die Kraft der Trägheit aufgeriebenen Thätigkeitsmoment $\frac{1}{2} \int m V^2 + C$.

Zwey und zwanzigster Lehrsatz.

203. Wenn ein System harter Körper, welches frey oder mit irgend einer Maschiene ohne Federkraft in Verbindung ist, und von bewegenden Kräften irgend einer Art bewegt wird, seine Bewegung durch unmerkliche Grade verändert, so ist die lebendige Kraft, nach Verlauf einer gegebenen Zeit, gleich der anfänglichen, plus derjenigen, welche Statt gefunden haben würde, hätte jeder Körper des Systems zu seiner alleinigen Geschwindigkeit diejenige gehabt, welche er erhalten haben würde, wenn er die von ihm beschriebene krumme Linie frey durchlaufen wäre; vorausgesetzt, daß er in jedem Puncte dieser krummen Linie nur von derselben bewegenden Kraft, die ihn wirklich darinn treibt, in Bewegung gesetzt worden, und seine anfängliche Geschwindigkeit = 0 gewesen sey.

Diesen Lehrsatz nennt man das Prinzip der Beständigkeit der lebendigen Kräfte in einem, seine Bewegung durch unmerkliche Grade veränderndenSysteme harter Körper.

Nimmt man an, die von jedem Körperchen des Systems beschriebene Curve wäre eine unbiegsame Linie, in welcher dieses Körperchen, wie ein bewegliches Korn, befestiget wäre, seine Geschwindigkeit wäre im ersten Augenblicke = o, und es bewegte sich alsdann frey längs dieser unbiegsamen Linie hin, d. h. ohne von den andern Theilen des Systems gehindert zu werden; bliebe aber in jedem Puncte von der nämlichen bewegenden Kraft animirt, welche in demselben Puncte seiner Curve bey dem wahren Zustande des Systems wirklich darauf wirkt; so behaupte ich, daß alsdann die Summe der lebendigen Kräfte, welche alle Körper am Ende ihrer sämmtlichen Bewegungen erlangt haben werden, eine und dieselbe seyn wird mit derjenigen, welche bey dem eigentlichen wahren Zustande des Systems am Ende der Bewegung wirklich Statt findet. Dieß ist der Sinn des zu beweisenden Satzes.

Behält man nun die Benennungen der Formel (M) (199.) bey, so haben wir $V\,dt = ds$, und mithin nimmt die Gleichung (M) folgende Gestalt an:

$$S\,m\,P\,ds\ \cos.\ ds\hat{}P - S\,m\,V\,dV = o.$$

Wir wollen also, wie ich so eben sagte, annehmen, die von m beschriebene Curve sey eine unbiegsame Linie, welche m, wie ein, an diese Curve befestigtes, bewegliches und von allem Zuge oder Drucke der übrigen Körper des Systems befreytes Korn, ungehindert durchlaufe, und es wirke in jedem Puncte dieser Curve dieselbe bewegende

Kraft P darauf, von der es in dem wahren Zustande der Dinge wirklich bewegt werde. Benennt man in diesem wirklichen Zustande die anfängliche Geschwindigkeit von m mit K, statt daß sie nach der neuen Voraussetzung = o ist, und eben so V^1 die Geschwindigkeit für m in dem Zeittheil ds; so erhält man durch das Integriren der vorigen Gleichung, um den wirklichen Zustand des Systems nach Verlauf der Zeit t kennen zu lernen:

$$S \int m P \, ds \cos. ds^\wedge P - S \int m V dV = o,$$

wo $\int$ das auf die Dauer der Bewegung sich beziehende Integrationszeichen, und S das auf die Gestalt des Systems sich beziehende ist. Nun aber war $S \int m V dV = \frac{1}{2} S m V^2$. Mithin kann man der Gleichung diese Gestalt geben:

$$S \int m P \, ds \cos. ds^\wedge P - \tfrac{1}{2} S m V^2 + C = o,$$

wo C eine zur Ergänzung des Integrals hinzugesetzte constante Größe ist.

Diese nun näher zu bestimmen, bemerke man, daß für den ersten Augenblick: V = K, und $S \int m P \, ds \cos. ds^\wedge P = o$ ist, weil die bewegende Kraft noch keine Wirkung hervorgebracht hat. Folglich ist $C = \frac{1}{2} S m K^2$; mithin:

$$S \int m P \, ds \cos. ds^\wedge P - \tfrac{1}{2} S m V^2 + \tfrac{1}{2} S m K^2 = o.$$

Aber aus demselben Grunde sieht man, daß die neue Voraussetzung geben muß:

$$S \int m \, P \, ds \cos. \, ds^{\wedge}P - \tfrac{1}{2} \, S \, m \, V'^2 = 0;$$

weil in diesem Falle die anfängliche Geschwindigkeit als o angenommen ist, und übrigens P dieselbe bleibt, wie im ersten Fall. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, und reducirt sie, so erhält man:

$$S \, m \, V^2 = S \, m \, K^2 + S \, m \, V'^2. \qquad (P)$$

Dieß war es, was bewiesen werden sollte.

Erster Zusatz.

204. Wenn die bewegende Kraft $P = 0$ ist; d. h. wenn das System von keiner bewegenden Kraft in Bewegung gesetzt wird, und jeder Körper keine andere Veränderung erleidet, als durch die Kraft der Trägheit, vermöge welcher die verschiedenen Theile des Systems auf einander hin- und zurückwirken; so wird das erste Glied der vorigen Gleichung (M) (199.) zu o. Dieß giebt also: $V' = 0$, und mithin wird aus der Formel (P) $S \, m \, V^2 = S \, m \, K^2$; d. h. die Summe der lebendigen Kräfte wird constant bleiben, wie wir es (177.) schon gefunden haben.

Zweyter Zusatz.

205. Wäre die Kraft P durch eine sich wechselseitig äußernde Anziehung unter den verschiedenen

Körpern des Systems, oder durch gewisse auf diesen Körpern befindliche fixe Puncte hervorgebracht worden, das Gesetz dieser Anziehung möchte auch übrigens seyn, welches es wollte, wenn es sich nur nach den Entfernungen richtete; so ist klar, daß die aus dieser Anziehung, zwischen je zweyen diesen Körpern in jedem Augenblicke entspringende lebendige Kraft gleich seyn würde dem Producte aus der Summe ihrer Massen, eine jede multiplicirt mit der anziehenden Kraft, die auf sie wirkt, und das Ganze multiplicirt durch die Größe, mit welcher sich die Körper während dieses Augenblicks einander nähern würden. Folglich, da sich diese anziehende Kraft in gleichen Entfernungen nach der Voraussetzung als dieselbe finden würde, so muß auch die durch sie zwischen zwey Körpern hervorgebrachte lebendige Kraft sich immer wieder als dieselbe finden, wenn diese Körper wieder in gleicher Entfernung von einander sind, welchen Weg auch jeder sonst für sich insbesondere genommen haben möge. Die in dem allgemeinen Systeme entstehende lebendige Kraft hängt also weder von dem Wege, den jeder Körper insbesondere nimmt, noch von der Zeit, in welcher er ihn durchläuft, sondern einzig von der Lage ab, in welcher er sich in Rücksicht auf die übrigen Körper des Systems befindet. Mithin wird diese lebendige Kraft immer auf gleiche Weise wachsen, wenn die Körper von einer gegebenen Lage ausgegangen und bis zu einer andern gegebenen gekommen sind. Und dieses Wachsen wird o seyn, d. h. die Summe der lebendigen Kräfte am Ende der Bewegung wird mit der des ersten Augenblickes zusammenfallen, wenn sich die Körper wieder in ihrer ursprünglichen Lage befinden.

Dritter Zusatz.

Theilten sich die Körper ihre Einwirkungen auf einander durch Maschienen mit Federkraft mit, und hienge der Druck dieser Federn bloß von ihrer stärkern oder schwächern Zusammenziehung, und nicht von zufälligen Ursachen ab, wie z. B. die Temperatur ist, so würde die durch eine jede Feder hervorgebrachte lebendige Kraft bloß von der Größe, um die sie sich dilatirt, keinesweges aber von der darauf verwandten Zeit abhängen. Denn die durch ihren Druck in jedem Augenblicke erzeugte Größe der lebendigen Kraft, sie mag sich übrigens befinden, in welcher Lage sie will, ist das Product dieses Druckes in dem unendlich kleinen Weg, welche ihre äußersten Enden zurücklegen, um sich von einander zu entfernen. Die lebendige Kraft des Systems wird folglich immer in gleichem Grade gewachsen seyn, wenn jede Feder von einem gegebenen Grade der Zusammenziehung aus, einen beliebigen andern, ebenfalls gegebenen Zustand der Zusammenziehung erreicht haben wird. Mithin wird diese Vermehrung o seyn, d. h. die Summe der lebendigen Kraft wird die nämliche seyn, wenn sich die Federn am Ende der Bewegung in dem nämlichen Zustande der Zusammendrückung befinden, wie im ersten Augenblicke.

Vierter Zusatz.

206. Wären nun Federn, deren Druck einzig von den Graden ihrer Zusammenziehung abhienge, und anziehende oder abstoßende Kräfte zugleich vorhanden, welche sich in dem Verhältnisse von irgend einer Art von Functionen der Entfernungen äusserten, so würde die nach einem gewissen Zeitverlauf Statt habende Vermehrung oder Verminderung der lebendigen Kräfte ebenfalls bloß abhängen von dem Grade der Zusammenziehung dieser Federn, und von den Entfernungen der Körper des Systems von einander, aber keinesweges von der absoluten Lage der einen gegen die andern, noch von den Wegen, die sie etwa nahmen, um in ihre neuen Lagen zu kommen; so daß, wenn diese Lagen der Körper und Federn wieder die nämlichen geworden wären, wie im ersten Augenblicke der Bewegung, das Zu- oder Abnehmen der lebendigen Kraft o seyn würde.

Fünfter Zusatz.

207. Wenn die bewegende Kraft P sowohl ihrer Intensität, als auch ihrer Richtung nach eine constante Größe ist; wie z. B. die gewöhnliche Schwere auf der Oberfläche der Erde, welche

ich g nennen will: so wird aus der Formel (M) (199.) wenn man in Bezug auf $\int$ integrirt:

$$g\, s \int m\ d s \cos.\ d s \hat{}\, g = \tfrac{1}{2} S m V^2$$

Nun ist es klar, daß, wenn man h die Höhe nennt, um welche das Körperchen m in t Zeit herabgefallen ist, sich daraus ergiebt

$$d s \cos.\ d s \hat{}\, g = d h.$$

Mithin wird die Formel:

$$g S \int m\ d h - \tfrac{1}{2} S m V^2 + C = o$$

oder $g S m h - \frac{1}{2} S m V^2 + C = o.$

Sechster Zusatz.

208. Benennt man aber mit M die ganze Masse des Systems, und mit H die Höhe, um welcher der Schwerpunct herabgekommen ist, so erhält man (114.) $S m h = M H$. Mithin giebt dieß:

$$g M H - \tfrac{1}{2} S m V^2 + C = o,$$

wo C die Hälfte der anfänglichen lebendigen Kraft ausdrückt. Angenommen also, daß K die anfängliche Geschwindigkeit von m sey, so bekommt man $C = \frac{1}{2} S m K^2$, und die Gleichung wird:

$$g M H - \tfrac{1}{2} S m V^2 + \tfrac{1}{2} S m K^2 = o,$$

oder wenn man mit 2 multiplicirt und versetzt:

$$S m V^2 = S m K^2 + 2 g.\ M H,$$

das heißt, in jedem Systeme schwerer Körper, die unmittelbar auf einander einwürken, aber ihre Bewegung in unmerklichen Graden verändern, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach einer jeden beliebigen Zeit gleich der Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte, plus dem doppelten Gewicht ($g M$) des ganzen Systems, multiplicirt mit der Höhe, um welche der Schwerpunct während dieser Zeit herabgekommen ist.

Siebenter Zusatz.

209. V^1 sey die Geschwindigkeit, welche ein von der Höhe H ungehindert herabfallender Körper erhalten würde, und welche man die von der Höhe H herrührende Geschwindigkeit nennt: so erhält man:

$$V^1 \, d V^1 = g \, d H,$$

oder wenn man integrirt und annimmt, daß die anfängliche Geschwindigkeit o sey, so giebt dieß $\frac{1}{2} V^{12} = g H$, oder wenn man mit 2 M multiplicirt, $2 g M H = V^{12}$. Substituirt man diesen Werth $2 g M H$ in die Gleichung des vorigen Zusatzes, so erhält man:

$$S m V^2 = S m K^2 + M V^{12},$$

d. h. in jeder durch Gewichte getriebenen Maschiene, deren Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, ist die Summe der lebendigen Kräfte nach Verlauf irgend einer gegebenen Zeit gleich der

Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte, plus der lebendigen Kraft, welche Statt gefunden hätte, wenn die in einem Schwerpuncte vereinigte ganze Masse des Systems frey von der Höhe herabgefallen wäre, welche dieser Schwerpunct wirklich von oben herab durchlaufen hat.

Achter Zusatz.

210. Ist der Schwerpunct so befestigt, daß er weder steigen noch fallen kann, so wird die Höhe $H = 0$ seyn. Man bekommt also $S\,m\,V^2 = S\,m\,K^2$. Somit wird auch die Summe der lebendigen Kräfte constant seyn, so gut, als wenn die Körper des Systems alle keine Schwere hätten.

Neunter Zusatz.

211. Weiß man gewiß, daß der Schwerpunct nicht herabkommen kann, und ist außerdem die anfängliche Geschwindigkeit jedes Körpers $= 0$, so erhält man $K = 0$; folglich $S\,m\,V^2 = 0$. Da nun aber V^2 schlechterdings immer positiv seyn muß, V selbst mochte positiv oder negativ seyn; so ist die vorige Gleichung nicht anders statthaft, als wenn auch $V = 0$, d. h. als wenn Gleichgewicht vorhanden ist. Um also im Allgemeinen darzuthun, daß eine durch Gewichte getriebene Maschiene, die sich selbst überlassen ist, und der man nicht die geringste Bewegung mitgetheilt hat, im Gleichgewicht bleiben müsse, ist es hinreichend,

wenn man beweist, daß der Schwerpunct nicht herabgleiten kann.

Zehnter Zusatz.

212. Wenn sich also der Schwerpunct auf dem möglichst niedrigsten Puncte befindet, so ist Gleichgewicht vorhanden, denn wir haben so eben gesehen, daß dafür der Beweis hinreicht, daß der Schwerpunct des Systems nicht herabgleiten kann. Denn wie wäre dieß nur möglich, da er sich, nach der Voraussetzung, schon auf dem möglichst niedrigsten Puncte befindet?

Eilfter Zusatz.

213. Wären nur zwey Gewichte in dem System, und könnte sich die Maschiene nicht anders bewegen, als wenn ein Körper herauf, und der andere zu gleicher Zeit heruntergienge, und stünden ferner ihre Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnisse dieser Gewichte, so müßte nothwendig Gleichgewicht Statt finden, die Maschiene sey von welcher Gattung sie wolle. Denn bei dieser Voraussetzung ist es klar, daß die vertikale Geschwindigkeit des Schwerpunctes im ersten Augenblicke 0 seyn würde. Vermöge des achten Zusatzes also würde Gleichgewicht vorhanden seyn.

Dreyundzwanzigster Lehrsatz.

214. Wenn ein System von Körpern seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, und durch eine Stellung hindurch geht, in welcher sich die bewegenden Kräfte für sich allein wechselseitig das Gleichgewicht halten würden; so wird die Summe der lebendigen Kräfte in diesem Zeitpuncte ein Minimum, oder ein Maximum seyn.

Denn die Gleichung (M) (199.) giebt:

$$\mathrm{S}m\,VP\,dt\,\cos.\,V^{\wedge}P = \mathrm{S}m\,VdV.$$

Aber V ist eine geometrische Geschwindigkeit (153.). Also ist, bey vorhandenem Gleichgewicht, das erste Glied (200.) dieser Gleichung o. Für den Fall des Gleichgewichts also erhält man:

$$\mathrm{S}m\,VdV = o, \text{ oder } d\mathrm{S}m\!\int\! V^2 = o,$$

mithin ist $\mathrm{S}m\!\int\! V^2$ ein Minimum oder Maximum. Hierinnen besteht das von Courtivron aufgestellte Gleichgewichtsprinzip.

Vierundzwanzigster Lehrsatz.

215. Wenn sich mehrere, von verschiedenen bewegenden Kräften angeregte, Körper wechselseitig das Gleich-

gewicht halten, und man nun dem System irgend eine geometrische Bewegung mittheilt, so ist die Summe der Producte aus jeder bewegenden Kraft, multiplicirt durch seine geometrische Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, = Null.

Dieß ergiebt sich augenscheinlich aus der (199.) aufgefundenen Formel (N); denn dann ist vermöge der Voraussetzung $V = 0$, mithin reducirt sich das erste Glied dieser Gleichung auf 0; und folglich, wenn man mit dt dividirt, auf:

$$S\, m\, P.\, u \cos.\, u\hat{}P = 0,$$

welches genau der algebraische Ausdruck des behaupteten Satzes ist. Q. E. D.

Erster Zusatz.

216. Der Werth jeder beliebigen Kraft des Druckes, wie sie z. B. Menschen, Thiere, Springfedern ꝛc. ausüben, kann durch eine bewegende Kraft, wie ein Gewicht, ausgedrückt werden. Ferner haben wir (161.) gesehen, daß jede virtuelle Geschwindigkeit einer geometrischen Bewegung zugehört; und so folgt aus dem vorigen Lehrsatz dieser, d. i. das bekannte Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

„Wenn mehrere, an irgend einem System, oder einer Maschiene angebrachte Kräfte sich wechselseitig das Gleichgewicht halten, und dieses Gleichgewicht durch das Einwirken einer neuen, unendlich kleinen Kraft gestört wird: so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft in ihre virtuelle Geschwindigkeit, in der Richtung dieser Kraft genommen, d. h. in die unendlich kleine Geschwindigkeit des Puncts, wo sie angebracht ist, geschätzt in der Richtung dieser Kraft, = o".

Sind nur zwey Kräfte im System, und unter ihnen Gleichgewicht; so werden diese beyden Kräfte im wechselseitigen Verhältnisse ihrer virtuellen Geschwindigkeiten, in der Richtung dieser Kräfte geschätzt, stehen.

Zweyter Zusatz.

217. Wenn also eine, dem Zusammendrücken widerstehende Flüssigkeit, ohne Schwere, und ohne bewegende Kräfte irgend einer Art, von allen Seiten in ein Gefäß eingeschlossen wird, und man in die Wände des Gefäßes zwey unendlich kleine, unter sich ungleiche Oeffnungen macht, sodann aber Stempel senkrecht anbringt, welche durch, sich wechselseitig das Gleichgewicht haltende, Kräfte gestoßen werden; so werden sich diese beyden Kräfte, wie die Flächen der in den Wänden angebrachten unendlich kleinen Oeffnungen verhalten;

denn es ist augenscheinlich, wie diese Bedingung nothwendig ist, wenn diese Kräfte im wechselseitigen Verhältnisse der virtuellen Geschwindigkeiten stehen sollen, welche Statt haben würden, wenn das Gleichgewicht unendlich wenig gestört werden sollte.

Dritter Zusatz.

218. Da wir, vermöge des vorigen Lehrsatzes, für den Fall des Gleichgewichtes erhielten $S\, m\, u\, P \cos. u\hat{}P = o$, so wird, wenn man alles mit $d\,t$ multiplicirt, und bedenkt, daß $u\,d\,t$ der durch m beschriebene, unendlich kleine Raum, $u\,d\,t \cos. u\hat{}P$ aber derselbe Raum ist, in der Richtung der Kraft P geschätzt, sich ergeben, daß, wenn P eine Anziehungskraft zwischen den Körpern oder gegen gewisse fixe Puncte ist, und wenn man p die Entfernung des m von dem ihn anziehenden Puncte nennt, $u\,d\,t \cos. u\hat{}P$ gleich ist $-\, d\,p$, und daß sich mithin die Gleichung $S\, m\, u\, P. \cos. u\hat{}P = o$ reduciren läßt auf $S\, m\, P\, d\,p = o$.

Angenommen also, daß sich die Anziehung in dem Verhältnisse einer Function der Entfernungen äußere, so wird $S\, m\, P\, d\,p$ eines genauen Integrals, als Function von p, fähig seyn; und wenn man annimmt, daß dieses genaue Integral Π sey, d. h. daß man $\Pi = \int S\, m\, P\, d\,p$ bekomme, so wird $\delta\, \Pi = o$ seyn; mithin Π ein

Minimum oder ein Maximum, d. h. wenn mehrere von wechselseitigen, oder gegen gegebene fixe Puncte gerichteten Anziehungskräften und Functionen von Entfernungen in Bewegung gesetzte Körper an eine Maschiene angebracht werden; so tritt das Gleichgewicht alsdann ein, wenn die Summe der Producte aus den bewegenden Kräften in die Entfernungen der Körper, welche durch sie nach den Puncten, die sie anziehen, getrieben werden, ein Maximum oder Minimum ist.

Dasselbe würde auf gleiche Weise Statt finden, wenn sich die Anziehung zwischen den, obgleich beweglichen, Körpern des Systems selbst äußerte, unter der Voraussetzung, daß p alsdann ihre Entfernungen von einander bedeutete, weil, wegen der unter ihnen, je zwey und zwey, immer gleichen und entgegengesetzten Wirkung und Gegenwirkung, die Größe S m P d p sichtlich immer o seyn würde, wie oben. Dieß ist das Prinzip, welches uns Maupertuis unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe gab, und wir werden am Ende dieses Werkes wieder darauf zurücke kommen.

Vierter Zusatz.

219. Der obige behauptete Lehrsatz läßt sich auch auf den Fall der Bewegung anwenden; denn alsdann zerlegt sich die Bewegung, mit welcher sich jeder Punct zu bewegen strebt, in zwey, deren eine bleibt, und die nachfolgende Bewegung

bewirkt, die andere aber aufgehoben wird. Nun aber war diese aufgehobene Bewegung dem durch den obigen Lehrsatz ausgesprochenen Gesetze unterworfen (169. 190.); d. h. „der Zustand der Ruhe, oder der Bewegung irgend eines Systems von Kräften, die an einer Maschiene angebracht sind, sey, welcher er wolle, so ist, wenn man dasselbe mit einemmal eine geometrische Bewegung annehmen läßt, ohne diese Kräfte zu verändern, die Summe der Producte aus jeder Kraft in die Geschwindigkeit, welche der Punct, an welchem sie angebracht ist, im ersten Augenblicke haben wird, geschätzt in der Richtung dieser Kraft, = 0".

Vielleicht ist es nicht ganz unnütz, einem Einwurfe zu begegnen, der sich im Kopfe derjenigen bilden könnte, welche auf den eigentlichen Sinn des Wortes „Kraft" nicht ganz aufmerksam gewesen sind. „Wir wollen uns, z. B." hör' ich sie sagen, "eine Rad- und Zylinderwelle vorstellen, von welcher Gewichte an vertikalen Stricken herabhängen mögen: so wird sich, bey vorhandenem Gleichgewicht, oder gleichförmiger Bewegung, das an dem Rade befestigte Gewicht zu dem an dem Zylinder befestigten, verhalten, wie der Radius des Zylinders zu dem des Rades. Doch dieß gilt nicht mehr, wenn die Maschiene eine beschleunigte oder verzögerte Bewegung annimmt; es scheint also, daß alsdann die Kräfte nicht mit ihren Geschwindigkeiten in der Richtung dieser Kräfte geschätzt, im wechselseitigen Verhältnisse stehen, wie dieß doch aus dem Satze folgen sollte". — Darauf dient zur Antwort, daß im Fall einer ungleichförmigen Bewegung die genannten Gewichte nicht die einzigen Kräfte sind, welche sich im Systeme äußern; denn weil die Bewegung jedes Körpers sich ununterbrochen verändert, so setzt er auch vermöge seiner Trägheit dieser Veränderung seines Zustandes in jedem Augenblicke einen Widerstand entgegen: wir müssen daher diesen Widerstand mit in Rechnung bringen. Die durch die Körper ausgeübten Kräfte sind also nicht allein ihre Gewichte, sondern auch die durch diese Körper verlohrnen Bewegungsgrößen, die sich nach der Spannung der Seile bestimmen müssen, an welchen sie aufgehangen sind. Nun aber erhält sich (die Maschiene befinde sich in Ruhe, oder Bewegung, und diese sey gleichförmig oder nicht) die Spannung des an dem Rande zu der Spannung des an dem Zylinder befestigten Seiles, wie der Radius des Zylinders zum Radius des Rades: d. h. diese Spannungen, welche die wahren, durch die Körper sich äußernden Kräfte, die wahren, sich wechselseitig aufhebenden Bewegungsgrößen sind, verhalten sich immer, wie die Geschwindigkeiten dieser Körper; und dieß stimmt mit unserm Satze überein.

Fünfter Zusatz.

220. Lassen sich die Kräfte, welche um eine

Maschiene herum sich im Gleichgewicht befinden, auf zwey zurückbringen, so ist, die dem Systeme mitgetheilte geometrische Bewegung möge seyn, welche sie wolle, zufolge des Lehrsatzes klar, daß die eine Kraft sollicitiren, die andere widerstehen wird; d. h. die eine wird mit der Richtung ihrer Geschwindigkeit einen spitzen, die andere aber mit der übrigen einen stumpfen Winkel bilden; denn das Product der einen, in ihre Geschwindigkeit, in der Richtung dieser Kraft geschätzt, ist das Product derselben Kraft, in den Cosinus des Winkels, den sie mit ihrer Geschwindigkeit bildet (26.). Mithin kann die Summe dieser beyden Producte nur dann o werden, wenn ein Cosinus negativ ist, d. h. nicht anders, als wenn der eine Winkel spitz, der andere stumpf ist.

Sechster Zusatz.

221. Wir wollen uns ein System von Körpern vorstellen, welche, von beliebigen bewegenden Kräften bewegt, an eine Maschiene angebracht sind; m heiße jede Masse des Systems, u ihre Geschwindigkeit, k die anfängliche Geschwindigkeit, p die beschleunigende Kraft von m, wenn sie sollicitirend, p' wenn sie widerstrebend ist, und d t das Zeitelement. Nach Verlauf einer gewissen gegebenen Zeit wird also:

$$\int dt\, S\, m\, p\, u \cos. p^\wedge u - \int dt\, S\, m\, p\, u \cos. p'^\wedge u = \tfrac{1}{2} S\, m\, u^2 - \tfrac{1}{2} S\, m\, k^2.$$

Aber das erste Glied dieser Gleichung ist (63.) das durch alle sollicitirende Kräfte consumirte Thätigkeitsmoment, und das zweyte, das durch die widerstrebenden Kräfte absorbirte Moment der Thätigkeit. Angenommen also, daß diese Momente M, M^1 seyen, so wird aus der vorigen Gleichung:

$$M - M^1 = \frac{1}{2} S m u^2 - \frac{1}{2} S m k^2;$$

und da u^2, als Quadrat, immer positiv ist, so kann $S m u^2$ niemals negativ werden. Nimmt man also $k = 0$ an, so erhält man schlechterdings $M > M^1$; wir können folglich als Grundsatz festsetzen:

„die an einem beliebigen, sich in Ruhe befindenden, Systeme von Körpern im ersten Augenblick der Bewegung angebrachten Kräfte mögen seyn, welche sie wollen, so ist immer das nach Verlauf einer gegebenen Zeit durch die sollicitirenden bewegenden Kräfte verlohrne Thätigkeitsmoment größer, als das in derselben Zeit durch die widerstrebenden bewegenden Kräfte absorbirte Thätigkeitsmoment.

Hieraus folgt z. B., daß, man mag auch an einer im ersten Augenblicke ruhigen Maschiene Gewichte anbringen, auf welche Art man will, so wird es doch unmöglich seyn, daß der Schwerpunct des Systemes in die Höhe steigen sollte, wenn man das System sich selbst überläßt.

Siebenter Zusatz.

222. Weil, bey der Voraussetzung, daß irgend eine Bewegung entstehe, die Größe M schlechterdings größer als M^1 ist, so muß nothwendig Gleichgewicht eintreten, wenn man gewiß seyn kann, daß M nie größer als M^1 seyn könne. Diesem nach können wir diesen neuen Grundsatz für das Gleichgewicht feststellen, welcher nur ein allgemeinerer Ausdruck des für die Maschienen mit Gewichten (211.) gegebenen ist:

„Um gewiß zu seyn, daß mehrere an einer Maschiene, welche sich im ersten Augenblicke in Ruhe befindet, angebrachte bewegende Kräfte im Gleichgewicht bleiben müssen, so ist es genug, wenn man beweißt, daß im Gegentheile, das im ersten Augenblicke der Bewegung durch alle sollicitirenden bewegenden Kräfte consumirte Thätigkeitsmoment, kleiner, oder wenigstens nicht größer seyn werde, als das in derselben Zeit durch die widerstrebenden bewegenden Kräfte absorbirte Moment der Thätigkeit“.

Dieser Satz gilt ohne Ausnahme und selbst von den Fällen, auf welche das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nicht anwendbar ist. Denn so sey z. B. A (Fig. 24.) ein zwischen zwey schiefe Ebnen $\overline{RP}$ und $\overline{RQ}$ gestelltes Gewicht; auf diesen Fall läßt sich das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nicht anwenden, weil man das Gleichgewicht hier nur vermittelst einer endlichen Kraft stören kann, dahingegen der so eben aufgestellte Grundsatz augenscheinlich diesen und alle ähnliche Fälle umfaßt.

Der vorige Satz läßt sich auch noch auf folgende Art ausdrücken:

„Keine Maschiene kann sich in Bewegung setzen, ohne daß die Summe der Producte aus jeder an ihr angebrachten Kraft in ihre Geschwindigkeit, nach der Richtung dieser Kraft geschätzt, am Ende des ersten Augenblicks positiv und größer als o seyn sollte".

Fünfundzwanzigster Lehrsatz.

223. **Wenn mehrere bewegende Kräfte an verschiedenen Theilen eines vollkommen freyen Systems von Körpern angebracht sind, so bewegt sich der Schwerpunct auf dieselbe Art, als wenn die ganze Masse des Systems in diesem einzigen Puncte vereinigt, und alle die Bewegungen ihm unmittelbar mitgetheilt wären.**

Denn da, nach der Voraussetzung, das System durch kein Hinderniß belästigt wird, so wird es nach jeder Richtung die ganze Summe der dem

Systeme in der nämlichen Richtung mitgetheilten Kräfte erhalten. Allein (115.) der Schwerpunct bewegt sich allezeit, es sey in welcher Richtung es wolle, mit einer Geschwindigkeit, welche, durch die ganze Masse des Systems multiplicirt, gleich ist der ganzen Größe der Bewegung in der nämlichen Richtung. Mithin ist die Bewegung des Schwerpunctes bei jedweder Gestalt des Systems immer dieselbe, wofern das System nur nicht durch ein Hinderniß genirt wird. Folglich ist sie dieselbe, als wenn die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt wäre.

Sechsundzwanzigster Lehrsatz.

224. **In jedem Systeme von Kräften, diese als immateriell betrachtet (oder von der Kraft der Trägheit abstrahirt), welches seine Bewegung in unmerklichen Graden verändert, ist das in einer gegebenen Zeit von allen sollicitirenden Kräften consumirte Thätigkeitsmoment beständig gleich den in derselben Zeit durch die widerstrebenden Kräfte absorbirten Momente der Thätigkeit.**

Denn, wenn man jede sollicitirende Kraft F nennt, V die Geschwindigkeit des Punctes, wo sie angebracht ist, f jede widerstrebende Kraft, v die Geschwindigkeit des Punctes, an welchem sie angebracht, und d t das Zeitelement, so bekommt man (200.)

$$S F V \cos. F'V - S f v \cos. f'v = 0.$$

Multiplicirt man mit d t und integrirt, um den Zustand des Systems nach Verlauf einer gewissen Zeit zu bekommen, so ist:

$$S \int F V\, dt \cos. F'V - S \int f v\, dt \cos. f'v = 0.$$

Aber das erste Glied dieser Formel ist (63.) das durch die sollicitirenden Kräfte F, während der Dauer der Bewegung, consumirte Thätigkeitsmoment; und das zweyte Glied, das in derselben Zeit durch die widerstrebenden Kräfte absorbirte Moment der Thätigkeit. Mithin ist das durch die Kräfte F consumirte Thätigkeitsmoment gleich dem durch die Kräfte f absorbirten. Q. E. D.

Siebenundzwanzigster Lehrsatz.

225. **Wenn zwischen mehreren, zu gleicher Zeit an einer Maschiene angebrachten, Kräften Gleichgewicht Statt findet, und man sowohl diese an der Maschiene thätigen Kräfte, als auch diejenigen betrachtet, welche die Hindernisse selbst, oder die fixen Puncte äußern, die ein Theil davon sind, so wird:**

1) Die Summe aller dieser Kräfte, nach jeder beliebigen Richtung geschätzt, gleich o seyn.

2) Auch die Summe der Momente dieser nämlichen Kräfte, so fern sie eine Umdrehung um eine beliebig im Raume angenommene Achse nach einer und derselben Richtung zu bewirken streben, ist ebenfalls = o.

Denn wenn man für die durch die Hindernisse ausgeübten leidenden Kräfte, thätige substituirt, wie die an der Maschiene angebrachten sind, so wird das System vollkommen frey werden; und man wird dann auf dasselbe die nämlichen Schlüsse anwenden können, welche oben (191. und 193.) gezogen wurden. Q. E. D.

226. Gäbe es in dem Systeme bloß eine feste Achse, so würden alle durch diese Achse ausgeübten leidenden Kräfte, in Rücksicht auf diese Achse selbst, keinen Moment haben. Mithin würde für diesen Fall die Summe der Momente der blossen thätigen Kräfte, in Beziehung auf diese Achse, welche das System in einer gegebenen Richtung zu drehen strebten, = o seyn.

227. Die Methode, welche man gewöhnlich bey Feststellung der allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung befolgt, besteht dar-

innen, daß man dem von Maclaurin eingeführten, vortrefflichen Gebrauche gemäß, das System auf 3, unter sich senkrechte Achsen bezieht. Doch habe ich für die ersten, so eben aus einander gesetzten Prinzipien einen ganz andern nähern Weg gefunden. Jedoch ist es sehr leicht, die Resultate, die ich gefunden habe, nun auch wirklich in Beziehung auf 3 recht winklichte Achsen auszudrücken; für die plötzlichen Veränderungen ist dieß schon (184.) geschehen, ich muß es nun noch auf gleiche Weise für die in unmerklichen Graden sich ändernden Bewegungen thun. Dieß ist der Gegenstand der folgenden Ausdrücke und der Sätze, welche noch folgen werden, und welche nichts weiter, als Verwandlungen der oben schon gefundenen Gleichungen sind.

228. Wir wollen also annehmen, ein von verschiedenen beliebigen bewegenden Kräften getriebenes System verändere seine Bewegung in unmerklichen Graden; man denke sich im Raume drei verschiedene, sich unter einander senkrecht schneidende Achsen, um die Bewegung auf sie zu beziehen; man zerlege die Bewegung eines jeden Körpers in drey andere, welche mit diesen Achsen parallel sind. Dieß angenommen, bezeichne ich:

jedes kleinste Theilchen des Systems mit m
seine drey Coordinaten mit x, y, z
seine Geschwindigkeit für ein gegebenes Zeitelement, geschätzt in der Richtung dieser 3 Achsen, mit V^{I}, V^{II}, V^{III}

die bewegende Kraft in demselbigen Augenblick, in gleicher Richtung geschätzt, mit P^{I}, P^{II}, P^{III}

seine geometrische Geschwindigkeit, d. h. diejenige, welche dieses Theilchen erhalten würde, wenn man die wirkliche Bewegung mit einemmale in eine geometrische verwandelte; diese Geschwindigkeit ebenfalls respective in der Richtung der Achse geschätzt, mit u^{I}, u^{II}, u^{III}

den von m während einer gewissen Zeit durchlaufenen Raum mit s

und die Dauer der Bewegung mit t.

229. Dieß angenommen, erhält man für das ganze System in jedem Augenblicke folgende zwey Gleichungen:

$$S\,m\,P^{I}V^{I}dt + S\,m\,P^{II}V^{II}dt + S\,m\,P^{III}V^{III}dt = S\,m\,V^{I}dV^{I} + S\,m\,V^{II}dV^{II} + S\,m\,V^{III}dV^{III} \quad (M^{I})$$

$$S\,m\,P^{I}u^{I}dt + S\,m\,P^{II}u^{II}dt + S\,m\,P^{III}u^{III}dt = S\,m\,u^{I}dV^{I} + S\,m\,u^{II}dV^{II} + S\,m\,u^{III}dV^{III} \quad (N^{I})$$

Und dieß sind in der That nichts anders, als die (199.) gefundenen Formeln (M) (N) auf eine solche Art verwandelt, daß man die Bewegung auf die drey gegebenen Achsen beziehen kann. Denn nach dem oben (118.) Gesagten, ist:

$V\,dV = V^I\,dV^I + V^{II}\,dV^{II} + V^{III}\,dV^{III}$ und
$PV \cos. P^\wedge V = P^I V^I + P^{II} V^{II} + P^{III} V^{III}$.

Substituirt man also diese Werthe in die Formel (M), so giebt dieß die erste (M^I) der beyden obigen Formeln. Aus demselben Grundsatze ist, weil u willkührlich, obschon V sich verändert:

$u\,d\,(V \cos. u^\wedge V)$ eins mit $d\,(u\,V \cos. u^\wedge V)$ oder mit $d\,(u^I V^I + u^{II} V^{II} + u^{III} V^{III})$ wo u^I, u^{II} und u^{III} als constante Größen behandelt werden müssen; mithin hat man:

$$u\,d\,(V \cos. u^\wedge V) = u^I\,dV^I + u^{II}\,dV^{II} + u^{III}\,dV^{III},$$

und aus demselben Grunde

$$P u \cos. P^\wedge u = P^I u^I + P^{II} u^{II} + P^{III} u^{III}.$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Formel (N) (199.), so wird man die zweyte (N^I) der oben aufgestellten Formeln erhalten. Q. E. D.

230. Im Falle des Gleichgewichts ist $V = 0$, $dV = 0$: mithin reducirt sich die Gleichung (M^I) auf $0 = 0$, und aus der Gleichung (N^I) wird:

$$S m P^I u^I + S m P^{II} u^{II} + S m P^{III} u^{III} = 0 \quad (N^{II})$$

und dieß die allgemeine Formel für das Gleichgewicht auf drei senkrechte Achsen bezogen.

231. Man kann diese allgemeine Formel un-

mittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ziehen; denn jede bewegende Kraft $m P^I$, $m P^{II}$, $m P^{III}$ wird hier von einer nach der nämlichen Richtung gehenden geometrischen Geschwindigkeit u^I, u^{II}, u^{III} getrieben, so daß, wenn der von jeder Kraft und ihrer Richtung eingeschlossene Winkel $= 0$ ist, so ist sein Cosinus $= 1$, wodurch alle diese Cosinusse verschwinden.

232. Eben so kann man weiter aus dieser allgemeinen Formel für das Gleichgewicht die Formeln für die Bewegung leicht ableiten (M^I) (N^I). Denn da die bewegende Kraft von m in der Richtung von $x = m P^I$ ist, so ist die Größe der Bewegung, welche m vermöge dieser Kraft während dt anzunehmen strebt, $= m P^I dt$; nach der Voraussetzung aber erlangt es bloß die Bewegungsgröße $m\, dV^I$. Mithin verliehrt es durch Wirkung und Gegenwirkung der Körper $m P^I dt - m\, dV^I$ in der Richtung von x. Aus demselben Grunde verliehrt es in der Richtung von y die Bewegungsgröße $m P^{II} dt - m\, dV^{II}$, und in der Richtung von z die Bewegungsgröße $m P^{III} dt - m\, dV^{III}$. Mithin sind dieß die in dem Augenblick dt aufgehobenen Kräfte, oder diejenigen, welche sich wechselseitig das Gleichgewicht halten würden, wenn sie die einzigen wären. Folglich sind sie die, welche man in der oben gefundenen, allgemeinen Gleichgewichtsformel (N^{II}) für P^I, P^{II}, P^{III} substituiren muß, und dann erscheint diese Formel wieder

in der Gestalt (N^I), in welcher die Formel (M^I) als ein besonderer Fall enthalten ist, weil die Geschwindigkeiten V^I, V^{II}, V^{III} geometrische von der ersten Ordnung sind.

233. Vermöge der Geschwindigkeiten V^I, V^{II}, V^{III} durchläuft der Körper m, während dt, respective die Räume dx, dy, dz, in der Richtung der Coordinaten x, y, z. Man kann also in die vorigen Gleichungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, und $\frac{dz}{dt}$ statt V^I, V^{II}, und V^{III} substituiren, und alsdann wird aus der Gleichung, wenn man alles mit dt multiplicirt:

$$dt\,(S m P^I dx + S m P^{II} dy + S m P^{III} dz) = S m dx\, d\frac{dx}{dt} + S m dy\, d\frac{dy}{dt} + S m dz \frac{dz}{dt}$$

oder wenn man dt für constant gelten läßt, und damit dividirt:

$$S m P^I dx + S m P^{II} dy + S m P^{III} dz = S m \left(\frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{dt^2}\right)$$

oder: $$S m\,(P^I dx + P^{II} dy + P^{III} dz) = \tfrac{1}{2} S m d \frac{ds^2}{dt^2}.$$

234. Nehmen wir ferner an, daß vermöge gewisser geometrischer Geschwindigkeiten, u^I, u^{II},

u^{III}, jeder Körper m in einer jeden unendlich kleinen, gegebenen Zeit, welche dem dt nichts angeht, die Räume δx, δy, δz, in der Richtung der Coordinaten x, y, z, durchlaufe, so können wir in der Formel (N^I) diese Größen für u^I, u^{II} und u^{III} substituiren, woraus wir denn, durch die Multiplication mit dt erhalten:

$$dt\,(S m P^I \delta x + S m P^{II} \delta y + S m P^{III} \delta z)$$
$$= S m\, \delta x\, d\frac{dx}{dt} + S m\, \delta y\, d\frac{dy}{dt}\, S m\, \delta z\, d\frac{dz}{dt}$$

oder, wenn man dt als constant annimmt, und damit dividirt:

$$S m\,(P^I \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z)$$
$$= S m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right) \quad (N^{III})$$

Man wird auch noch dieselben Resultate erhalten, wenn man die Sache ein wenig anders, und zwar auf folgende Art ansieht.

Die durch jeden Körper eines Systems ausgeübten Kräfte sind überhaupt von zweyerley Gattung, nämlich die bewegende Kraft und die Kraft der Trägheit. Zerlegt man jede der ersteren m P in drey andere, mit den drey gegebenen Achsen gleichlaufende m P^I, m P^{II} und m P^{III}, und eben so jede der anderen $-m\frac{dV}{dt}$ in drey andere $-m\frac{dV'}{dt}$, $-\frac{dV''}{dt}$ und $-\frac{dV'''}{dt}$, die auch respective mit diesen Achsen parallel sind, so kann man den Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten auf dieses allgemeine System von Kräften anwenden, wenn man in der Richtung einer jeden von ihnen einen fixen Punct annimmt, und sodann die Summe der Producte aus jeder von ihnen in die Abweichung von diesem Abstande = o macht.

Ferner können wir, da diese fixen Puncte willkührlich sind, sie alle in den drey fixen Ebnen selbst annehmen, in welchen die Achsen liegen, auf die man diese Bewegung bezieht. Und somit wird jede der in der Richtung von x gehenden Kräfte, als an dem Puncte angebracht gedacht werden, wo ihre Richtung die fixe Ebene von y und z schneidet; so auch die übrigen. Folglich erhalten wir, vermöge des Grundsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$S\,m\,(P'\,\delta x + P''\,\delta y + P'''\,\delta z) - S\,m \left(\frac{dV'}{dt}\,\delta x + \frac{dV''}{dt}\,\delta y + \frac{dV'''}{dt}\,\delta z\right) = o,$$

und dieß kommt mit dem Obigen auf eins hinaus.

Für den Fall des Gleichgewichts reducirt sich diese Gleichung augenscheinlich auf:

$$Sm\,(P^{I}\,\delta x + P^{II}\,\delta y + P^{III}\,\delta z) = 0.$$

235. Ich werde eingebildete oder fingirte Lage (position fictice) des Punctes m diejenige nennen, wo er sich befinden würde, wenn er statt dx, dy, dz, respective in der Richtung von x, y und z zu durchlaufen, δx, δy und δz durchliefe, und den Abstand seiner wirklichen Lage von seiner eingebildeten werde ich die Variante dieses Punctes heißen. Diese Variante wird folglich $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$ seyn, indeß das Element des wirklich beschriebenen Bogens $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist.

236. Wir wollen dieß annehmen, und uns vorstellen, daß das System von einer gegebenen Lage, welche ich mit (A) bezeichnen will, ausgehe, um zu einer andern, durch (B) bezeichneten, zu gelangen. Es möge ferner jetzt unendlich wenig von dieser Bahn abgewichen seyn, und auf seinem neuen Wege durch die, von mir oben so genannte eingebildete Lage gehen. Die dieser Lage entsprechenden δx, δy und δz werden alsdann das seyn, was man im Variationskalkul Variationen von x, y und z nennt. Die Variation δs der Curve muß man wohl von dem unterscheiden, was ich oben die Variante nennte;

denn diese war: $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; die Variation δs hingegen ist $\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2 dz^2}$, welches ein großer Unterschied ist. Und benennt man diese Variante mit δs, so ist nach (118.) klar, daß man erhält:

$$ds\, \delta^{\text{I}} s \cos.\, ds^{\wedge} \delta^{\text{I}} s = dx\, \delta x + dy\, \delta y + dz\, \delta z, \text{ oder}$$

$$V\, \delta^{\text{I}} s \cos.\, V^{\wedge} \delta^{\text{I}} s = V^{\text{I}} \delta x + V^{\text{II}} \delta y + V^{\text{III}} \delta z$$

und auf gleiche Weise:

$$P\, \delta^{\text{I}} s \cos.\, P^{\wedge} \delta^{\text{I}} s = P^{\text{I}} \delta x + P^{\text{II}} \delta y + P^{\text{III}} \delta z.$$

237. Man nehme an, daß p der Abstand des Körpers m von einem in der Richtung der Kraft P angenommnen fixen Puncte sey, so, daß man ihn als diesen fixen Punct anziehend ansehen könnte. Es sey folglich dp die Größe, um welche sich der Körper m von diesem fixen Puncte entfernt, und δp diejenige, um welche er sich von demselben entfernen würde, wenn er δx, δy und δz in der Richtung von x, y und z, anstatt dx, dy und dz durchliefe; unter diesen Voraussetzungen ist nach (11.) klar, daß:

$$P^{\text{I}} dx + P^{\text{II}} dy + P^{\text{III}} dz = - P dp$$
$$P^{\text{I}} \delta x + P^{\text{II}} \delta y + P^{\text{III}} \delta z = - P \delta p$$

Mithin können die obigen Formeln (233.) folgende Gestalt annehmen:

$$2\, S m P d p + S m d.\, V^2 = 0.$$

$$S m P \delta p + S m \left(\frac{d^2 x}{d t^2} \delta x + \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y + \frac{d^2 z}{d t^2} \delta z \right) = 0.$$

238. In diesen Gleichungen betrachtet man P als eine einzige, auf m wirkende Kraft, oder als eine, die aus allen denen, die daran angebracht sind, resultirt; und da $P d p$, $P \delta p$ die durch die bewegende Kraft P consumirten Thätigkeitsmomente sind, und das von der aus mehrern andern resultirenden consumirte Thätigkeitsmoment gleich ist der Summe der durch alle diese Kräfte consumirten Thätigkeitsmomente (27. 63.), so folgt, daß, wenn man statt einer einzigen Kraft $m P$ mehrere $m P$, $m Q$, $m R$ rc. annimmt, auf deren Richtungen fixe Puncte angenommen werden, welche um die Größen p, q, r rc. von m entfernt sind, folgende zwey Gleichungen herauskommen:

$$2\, S m (P d p + Q d q + R d r + \ldots) + S m d.\, V^2 = 0$$

$$S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots)$$

$$+ S m \left(\frac{d^2 x}{d t^2} \delta x + \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y + \frac{d^2 z}{d t^2} \delta z \right) = o \quad (N^{IIII})$$

239. Dem letzten Gliede der (234. und 238.) gefundenen Formeln (N^{III}), (N^{IIII}), läßt sich eine merkwürdige Gestalt geben; denn wenn man die Größe $d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z$ differenziirt, so bekommt man:

$$d (d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z) = (d^2 x \, d x + d^2 y \, \delta y + d^2 z \, \delta z) + \tfrac{1}{2} \delta (d x^2 + d y^2 + d z^2),$$

oder, wenn man transponirt und mit $d t^2$ dividirt:

$$\frac{d^2 x \, \delta x + d^2 y \, \delta y + d^2 z \, \delta z}{d t^2} = \frac{d (d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z)}{d t^2} - \frac{\delta (d^2 x + d y^2 + d z^2)}{2 d t^2} \quad (N^{V})$$

oder, weil $d x^2 + d y^2 + d z^2 = d s^2$,

$$\frac{d^2 x}{d t^2} \delta x + \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y + \frac{d^2 z}{d t^2} \delta z = \frac{d (d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z)}{d t^2} - \frac{\delta d s^2}{2 d t^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von

$\frac{d^2 x}{d t^2} \delta x + \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y + \frac{d^2 z}{d t^2} \delta z$ in das letzte Glied der Formeln (N^{III}), (N^{IV}) so wird aus ihnen:

$$S m (P^I \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z)$$
$$= d S m \frac{d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z}{d t^2}$$
$$- \frac{\delta S m d s^2}{2 d t^2} \ldots (n^{III})$$

und $S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r \ldots\ldots)$
$$+ d S m \frac{d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z}{d t^2}$$
$$- \frac{\delta S m d s^2}{2 d t^2} = 0. \quad (n^{IV})$$

Man erinnere sich (238.) daß in der ersten Formel die bewegende Kraft $m P$, nach der Voraussetzung die resultirende aus allen auf m wirkenden bewegenden Kräften war; statt daß in der zweyten diese partiellen bewegenden Kräfte durch $m P$, $m Q$, $m R \ldots$ ausgedrückt wurden, u. s. w.

240. Man multiplicire die Gleichung (n^{III}) mit $d t$, und integrire in Bezug auf d, um den Zustand der Bewegung des Systems nach Verlauf einer gegebenen Zeit zu finden, so erhält man:

$$\int dt\, Sm\,(P'\delta x + P''\delta y + P'''\delta z)$$
$$= Sm\,\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt}$$
$$- \frac{\delta \int Smds^2}{2\,dt} + \text{const.}$$

Nimmt man an, daß die Lage des Systems für den ersten Augenblick gegeben sey, so erhält man für diesen ersten Augenblick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$. Mithin wird auch die Constante gleich 0 seyn.

Nimmt man ferner an, daß die Lage des Systems für den letzten Augenblick ebenfalls gegeben sey, so bekomme man auch für diesen Augenblick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, wodurch sich das erste Stück des zweyten Gliedes auf 0 reducirt.

241. Mithin wird sich, wenn man die Lage des Systems für den ersten und den letzten Augenblick gegeben annimmt, die Formel durch Multiplication mit dt auf folgende reduciren:

$$dt \int dt\, Sm\,(P'\delta x + P''\delta y + P'''\delta z) + \delta \tfrac{1}{2} \int Smds^2 = 0 \quad (n^v)$$

oder: $$dt \int dt\, Sm\,(P'\delta x + P''\delta y + P'''\delta z) + \int Smds\,d\delta s = 0;$$

oder wenn man mit dt, das als constant angenommen wird, dividirt, und darauf Rücksicht nimmt, daß $ds = V dt$, so giebt dieß:

$$\int dt\, Sm\, (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z) + \int Sm V d \delta s = 0.$$

Diese letztere Formel fällt mit der von Condorcet (s. d. Probleme des trois corps) als Hauptgrundsatz aufgestellten, zusammen; seine Richtigkeit leuchtet ein; aber er setzt, dem oben gesagten gemäß, voraus, daß die äußersten Puncte der beschriebenen Curve gegeben sind, d. h. daß für den ersten und letzten Augenblick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$ sey.

241. Für ds^2 setze man in der so eben gefundenen Formel (n^V) seinen Werth $dx^2 + dy^2$ dz^2, und führe die Operation aus, welche das Zeichen δ in dem letzten Gliede dieser Gleichung andeutet, so wird aus der Formel:

$$dt \int dt\, Sm\, (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z) + \int Sm\, (dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z) = 0;$$

oder, wenn man mit dt dividirt und bemerkt, daß $\frac{dx}{dt} = V^{I}$, $\frac{dy}{dt} = V^{II}$, $\frac{dz}{dt} = V^{III}$;

$$\int dt\, Sm\, (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z) + \int Sm\, (V^{I} d \delta x + V^{II} d \delta y + V^{III} d \delta z) = 0;$$

und dieß setzt allemal voraus, daß die äußersten Puncte der durch jeden beweglichen Körper beschriebenen Curve gegeben sind.

In derselben Voraussetzung kann man die Formel (n^{v}) auch ganz einfach auf folgende Art ausdrücken:

$$dt \int dt S m P \delta' s \cos. P^{\wedge} \delta' s + \delta \tfrac{1}{2} \int S m d s^2 = 0,$$
oder: $$\int dt S m P \delta' s \cos. P^{\wedge} \delta' s + \int S m V d \delta s = 0.$$

243. Die (234. 238.) gefundenen Formeln (N^{III}) (N^{IV}) lassen sich offenbar ganz besonders auf den Fall anwenden, wo die auf den Richtungen der Kräfte angenommenen fixen Puncte solche sind, welche im Verhältniß irgend einer Function der Abstände anziehend wirken. Unter dieser Voraussetzung reduciren sich diese Gleichungen, sobald Gleichgewicht vorhanden ist, auf folgende:

$$S m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \ldots\ldots) = 0.$$

Diese letzte auf das Gleichgewicht sich beziehende Formel würde ebenfalls gelten, wenn die Körper nicht bloß gegen fixe Puncte hingezogen würden, sondern sich auch wechselseitig unter einander selbst anzögen; wo man dann die respectiven Abstände dieser Körper unter sich, oder von den fixen Puncten, mit p, q, r .... bezeichnen würde; denn sie werden sich dann, je zwey und zwey betrachtet, um die Größen δp, δq und δr von einander entfernen. Stellt man sich also einen, auf der Richtung ihrer wechselseitigen Anziehung, willkührlich angenommenen, fixen Punct vor, und läßt diese Kräfte der Anziehung, welche, wegen der, zwischen der Wirkung und Gegenwirkung jederzeit statthabenden, Gleichheit, zwischen diesen beyden Körpern gleich seyn müssen, durch k ausgedrückt seyn; ferner den Abstand eines dieser beweglichen Körper von dem fixen Puncte durch p^{I}, und den des andern durch p^{II}; so erhält man als Summe der Thätigkeitsmomente, welche sie consumiren, während sie sich um die Größe δp entfernen, $k(\delta^{I}p + \delta p^{II})$ oder $k\delta p$. Aber, die Summe der Grössen $k(\delta p^{I} + \delta p^{II})$ ist o; mithin wird die Summe der Größen $k\delta p$ auch o seyn. —

Da, nach der Voraussetzung, die bewegenden Kräfte Anziehungskräfte sind, welche regelmäßigen Gesetzen nach dem Verhältniß von Functionen der Abstände unterworfen sind, so folgt, daß

$$Sm(Pdp + Qdq + Rdr + \ldots)$$

eines scharfen Integrals fähig ist. Dieses Integral mag π seyn, so bekommt man:

$$Sm(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.) = \delta\pi;$$

folglich, da man vorhin das erste Glied dieser Gleichung = o gefunden, ist es das zweyte auch. Mithin $\delta\pi$ = o; d. h. π ist im Falle des Gleichgewichts jederzeit ein Minimum oder ein Maximum. Diesen Grundsatz hat man das Gesetz der Ruhe genannt (218.), und er ist, wie man sieht, eigentlich kein anderer, als der Grundsatz von den virtuellen Geschwindigkeiten.

244. Unter derselben Voraussetzung, daß die bewegenden Kräfte sämmtlich anziehende oder ab-

stoßende Kräfte sind, welche gewissen Functionen der Abstände proportionirt wirken, findet man auch für den Fall der Bewegung eine, in so fern merkwürdige Formel, als sie unabhängig ist von den bewegenden Kräften.

Wirklich haben wir (205.) gesehen, daß alsdann der Thätigkeitsmoment, welcher durch die bewegenden Kräfte consumirt wurde, um das System aus einer gegebenen Lage in eine andere, gleichfalls gegebene, zu bringen, immer derselbe bleibt, die von jedem Körper genommene Bahn sey, welche sie wolle. Folglich differirt der Thätigkeitsmoment, welcher durch das System consumirt wurde, damit dieß aus der gegebenen Lage (A) in seine gegenwärtige gelangen konnte, von demjenigen, welchen er consumiren mußte, wenn er in seine eingebildete Lage (position fictice) kommen sollte, um so viel, als er consumiren müßte, wenn er directe aus seiner gegenwärtigen Lage in seine eingebildete übergehen sollte; d. i. um $S\,m\,(P^{I}\,\delta x + P^{II}\,\delta y + P^{III}\,\delta z)$.

Auf der andern Seite ist der Thätigkeitsmoment, welcher consumirt wurde, um das System aus der Lage (A) in seine gegenwärtige zu bringen, gleich der Hälfte der Zunahme der lebendigen Kräfte von der ersten Lage zur zweyten; und der Thätigkeitsmoment, welcher consumirt werden mußte, wenn das System in seine fingirte Lage übergehen sollte, ist ebenfalls gleich der Zunahme an lebendigen Kräften, welche Statt haben würde, wenn sich das System aus seiner gegebenen Lage (A) in jene begeben hätte, statt sich in seine gegenwärtige Lage zu begeben. Folglich ist der Unterschied dieser beyden Thätigkeitsmomente gleich der Veränderung $S m V \delta V$ der lebendigen Kraft. Mithin hat man $S m V \delta V = S m (P^{I} \delta x + P^{II} \delta y + P^{III} \delta z)$. Diese Formel würde offenbar auch dann gelten, wenn auch das System von einer andern Lage (A^{I}), als der gegebenen (A), ausgienge; wenn nur die Summe der lebendigen Kräfte in beyden Lagen (A), (A^{I}), gleich wäre, weil alsdann der Thätigkeitsmoment, welcher consumiret werden muß, um aus (A) in (A^{I}) zu kommen, und welcher immer durch den halben Unterschied der lebendigen Kräfte in beyden Lagen ausgedrückt wird, $= 0$ seyn würde.

Angenommen also, daß diese Summe von lebendigen Kräften für den ersten Augenblick wirklich gegeben sey, und daß man für das zweyte Glied der nach dieser Voraussetzung vorhin gefundenen Gleichung seinen, aus der weiter oben gefundenen (239.) Gleichung (n^{III}) genommenen Werth setze, so ist:

$$S m V \delta V = d S m \frac{dx \delta x + dy \delta y + dz \delta z}{dt^2} - \delta S m ds^2.$$

Man multiplicire alles mit dt, bemerke, daß

$V\,dt = ds$, versetze den letzten Ausdruck in das erste Glied, und reducire, so giebt dieß:

$$\delta\, S\, m\, V\, ds = d\, S\, m\, \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt} \quad \ldots . (P)$$

und diese Gleichung ist von den bewegenden Kräften schlechterdings unabhängig.

245. Integrirt man diese Gleichung in Bezug auf d, um den Zustand der Bewegung nach einer gegebenen Zeit zu wissen, so erhält man:

$$\delta\, S\, m \int V\, ds = S\, m\, \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{dt} + \text{const.}$$

Nimmt man, wie oben (241.), die Lage des Systems für den ersten Augenblick als gegeben an, so bekommt man für diesen ersten Augenblick $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ und $\delta z = 0$; mithin ist auch die Constante $= 0$.

Nimmt man ferner die letztere Lage des Systems auch als gegeben an, so wird für diese letzte Lage δx ebenfalls $= 0$, $\delta y = 0$, und $\delta z = 0$; folglich muß das zweyte Glied der Gleichung verschwinden; mithin wird bloß bleiben, $\delta S\, m \int V\, ds = 0$.. (Q) d. h. die Größe $S\, m \int V\, ds$ wird ein Minimum oder ein Maximum seyn.

In dieser Formel ist nun das berühmte Prinzip der kleinsten Wirkung, wenn die Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, enthalten. Und dieses Prinzip lautet, wie es la Grange in seiner Mechanik aufgestellt hat, folgendermaßen:

„Bey jeder Bewegung eines Systems von Körpern, welche durch wechselseitig anziehende, oder nach gewissen fixen Mittelpuncten hin strebende Kräfte bewegt werden, und gewissen Functionen der Abstände proportionirt sind, sind die durch die verschiedenen Körper und ihre Geschwindigkeiten beschriebenen Curven nothwendig so beschaffen, daß die Summe der Producte aus jeder Masse in das Integral der Geschwindigkeit, multiplicirt mit dem Element der Curve, ein Maximum oder ein Minimum ist, wofern man nur die ersten und die letzten Puncte jeder Curve als gegeben ansieht".

Die Größe $Sm\int Vds$, welche ein Minimum ist, ist eins mit $Sm\int V^2 dt$ oder mit $\int dt\, SmV^2$; folglich wächst diese Größe in jedem Augenblicke dt um $dt\, SmV^2$, und diese Größe ist nichts anders, als die gesammte lebendige Kraft des Systems, multiplicirt durch diesen Augenblick, d. h. die als ein Minimum sich findende Größe ist die Sammlung der Producte der lebendigen Kraft, welche in jedem Augenblick diesen Augenblick selbst hindurch Statt hat.

Nun aber war nach (201.) $SmV^2 = 2\int mVPdt\ \cos.\ V^\wedge P$, folglich: $dt\,SmV^2 = 2\,dt\int mVP\,dt\cos.\ V^\wedge P$, d. h. die Größe $dt\,SmV^2$, wovon das Integral ein Minimum ist, ist nichts anders (64.), als das Doppelte der Größe von Action, welche während dt von allen bewegenden Kräften aufgewendet wurden, um das System in Bewegung zu bringen. Mithin ist die Größe $\int dt\,SmV^2$, welche ein Minimum ist, eins mit $2\int dt\,SmVP\,dt\ \cos.\ P^\wedge V$; d. h. noch einmal so groß, als die Quantität von Action, welche von allen bewegenden Kräften des Systems aufgewendet wurden, um es aus einer gegebenen Lage in eine andere gegebene Lage zu bringen. Daher schreibt sich der, der oben gefundenen Formel beygelegte Nahme: Prinzip der kleinsten Wirkung. Jener Aufwand von Quantität der Action also scheint sich die Natur bey den, von ihr hervorgebrachten Veränderungen zu ersparen, und in dieser Hinsicht glaubten viele Gelehrte, den erwähnten Grundsatz als ein Resultat von den Caussis finalibus oder den Endursachen ansehen zu dürfen.

Wir haben (200.) gesehen, daß man für den Augenblick, wenn das System durch die Lage des Gleichgewichts hindurch geht, $SmVP\,dt\ \cos.\ P^\wedge V = 0$ erhält; und folglich, wenn man mit dt multiplicirt:

$$dt\,SmVP\,dt\ \cos.\ P^\wedge V = 0;$$

d. h. die Quantität von Action, welche alle Kräfte des Systems binnen der Zeit, in welcher dasselbe durch die Lage des Gleichgewichts hindurch geht, verwenden, ist $= 0$. Und so wird aus derselben Größe, welche im Fall des Gleichgewichts $= 0$ ist, ein Minus, für den Fall der Bewegung.

246. Aus der Formel (P) (244.) kann man noch andere wichtige Folgerungen ziehen; denn da ds^2 eins ist mit $dx^2 + dy^2 + dz^2$, so erhellt allerdings für's erste, daß man diese Formel auch so ausdrücken kann:

$$\delta S m (V^I dx + V^{II} dy + V^{III} dz)$$
$$= d S m (V^I \delta x + V^{II} \delta y + V^{III} \delta z) \quad (P^I)$$

eine Gleichung, in welcher die Buchstaben d und δ schlechterdings eine und dieselbe Rolle spielen.

247. Führt man die angegebenen Operationen aus, so erhält man:

$$S m (dx \delta V^I + V^I \delta dx + dy \delta V^{II} + V^{II} \delta dy + dz \delta V^{III} + V^{III} \delta dz)$$
$$= S m (\delta x dV^I + V^I d \delta x + \delta y dV^{II} + V^{II} d \delta y + \delta z dV^{III} + V^{III} d \delta z);$$

aber, da man, nach den Grundsätzen des Variationskalkuls, die Ordnung der Buchstaben d, δ, umkehren kann, so erhellt, daß das 2te, 4te und 6te Stück des ersten Gliedes das 2te, 4te und 6te Stück des zweiten Gliedes respective aufhebt.

Folglich reducirt sich die Gleichung auf folgende:

$$\begin{aligned} & Sm\,(\delta x\, dV^{I} + \delta y\, dV^{II} + \delta z\, dV^{III}) \\ = {} & Sm\,(dx\,\delta V^{I} + dy\,\delta V^{II} + dz\,\delta V^{III}) \ldots (P^{II}). \end{aligned}$$

Auch hier sieht man, daß die Buchstaben d, δ, noch dieselbe Rolle spielen.

248. Addirt man zu dieser Formel die identische Gleichung:

$$\begin{aligned} & Sm\,(x d\,\delta V^{I} + y d\,\delta V^{II} + z d\,\delta V^{III}) \\ = {} & Sm\,(x\delta\, dV^{I} + y\delta\, dV^{II} + z\delta\, dV^{III}) \text{ hinzu,} \end{aligned}$$

so bekommt man:

$$\begin{aligned} & Sm\,((\delta x\, dV^{I} + x d\,\delta V^{I}) + (\delta y\, dV^{II} + y\delta\, dV^{II}) \\ & \quad + (\delta z\, dV^{III} + z d\,\delta V^{III})) \\ = {} & Sm\,((dx\,\delta V^{I} + x\delta\, dV^{I}) + (dy\,\delta V^{II} \\ & \quad + y d\,\delta V^{II}) + (dz\,\delta V^{III} + z\delta\, dV^{III})) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} & \delta Sm\,(x\, dV^{I} + y\, dV^{II} + z\, dV^{III}) \\ = {} & dSm\,(x\delta V^{I} + y\delta V^{II} + z\delta V^{III}) \ldots (R) \end{aligned}$$

wo die Buchstaben d und δ immer noch auf dieselbe Weise gebraucht sind.

249. Integrirt man diese letztere Formel in Beziehung auf d, um den Zustand der Bewegung nach Verlauf einer gegebenen Zeit zu wissen, so bekommt man:

$$\begin{aligned} & \delta Sm \int (x\, dV^{I} + y\, dV^{II} + z\, dV^{III}) \\ & \quad = Sm\,(x\delta V^{I} + y\delta V^{II} + z\delta V^{III}) + \text{const.} \end{aligned}$$

Allein, wenn man die Geschwindigkeit jedes beweglichen Körpers für den ersten Augenblick als gegeben annimmt, d. h. wenn für diesen ersten Augenblick $\delta V^{I} = 0$, $\delta V^{II} = 0$ und $\delta V^{III} = 0$ ist, so wird die Constante auch $= 0$ seyn. Und wenn man eben so auch die Geschwindigkeiten für den letzten Augenblick als gegeben annimmt, so wird das zweyte Glied ganz verschwinden, die Gleichung sich folglich reduciren auf diese:

$$\delta S m \int (x\, d V^{I} + y\, d V^{II} + z\, d V^{III}) = 0 \ldots (S)$$

d. h. die Größe $S m \int (x\, d V^{I} + y\, d V^{II} + z\, d V^{III})$ wird ein Maximum oder ein Minimum seyn.

250. Setzt man in dieser Gleichung für $d V^{I}$, $d V^{II}$, $d V^{III}$ ihre Werthe: $d \frac{dx}{dt}$, $d \frac{dy}{dt}$, $d \frac{dz}{dt}$, so wird daraus, weil dt constant ist:

$$\delta S m \int \frac{x\, d^2 x + y\, d^2 y + z\, d^2 z}{dt} = 0.$$

Integrirt man theilweise, so entsteht daraus:

$$\delta S m \left(\frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{dt} \right) - \delta S m \int \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} = 0,$$

oder: $\delta S m\ (x V^{I} + y V^{II} + z V^{III}) - \delta S m \int V\, ds = 0.$

Wir wollen den radius vector von m, R nennen, so erhellt nach (218.), daß aus dem ersten Gliede der vorigen Gleichung, δ S m R V cos. R^V werden wird, mithin die Gleichung selbst $\delta S m (R V \cos. R^{\wedge}V - \int V d s) = o$.

Also ist für den Fall, in welchem man die Geschwindigkeit jedes beweglichen Körpers für den ersten und den letzten Augenblick als gegeben annimmt, diejenige Größe, welche ein Minimum oder ein Maximum ist, nicht $S m \int V d s$, wie dann, wenn die äußersten Puncte gegeben sind, sondern:

$$S m (R V \cos. R^{\wedge}V - \int V d s),$$

wo R den Abstand des m von dem Umschwung der Coordinaten ausdrückt. Da man aber diesen Umschwung ganz nach Willkühr annehmen kann, so ist die vorige Größe, in Rücksicht auf einen jeden, beliebig im Raum angenommenen Punct, ein Maximum oder ein Minimum.

251. Für den Fall, wenn die Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte gegeben ist, ohne daß übrigens weder die Geschwindigkeit jedes beweglichen Körpers insbesondere, noch seine Lage es sind, haben wir (245.) die Formel gefunden:

$$\delta S m V d s = d S m \frac{d x \delta x + d y \delta y + d z \delta z}{d t}$$
$$= d S m (V^{\mathrm{I}} \delta x + V^{\mathrm{II}} \delta y + V^{\mathrm{III}} \delta z).$$

Allein (nach 236.) ist das letzte Glied dieser Gleichung $dSm\,(V\delta' s.\ \cos.\ V''\delta' s)$. Folglich erhalten wir bey dieser Voraussetzung:

$$\delta S m V d s = d s m\,(V\delta' s.\ \cos.\ V''\delta' s).$$

Ich will das Einzelne nicht noch weiter ausspinnen, weil dieses außerhalb meines Gegenstandes liegen würde.

Betrachtungen über den Gebrauch bewegender Kräfte bey Maschienen.

252. Maschiene, im Allgemeinen, ist jeder Körper, welchen man zwischen zwey oder mehrere Kräfte bringt, um die Wirkung von der einen auf die andere, nach diesen oder jenen Bedingungen fortzuleiten, je nachdem der zu erfüllende Zweck ist. —

Maschiene, im eigentlichen Sinne, ist ein solcher vermittelnder Körper, welchen man als ohne Masse denkt, diese mag nun in der That, in Hinsicht der bey ihm angebrachten Kräfte, sehr klein seyn, oder man denkt sich die ihm eignen bewegenden und Trägheitskräfte als neue, von außen bey ihm angebrachte Kräfte, welche man im Kalkul, wie alle übrige, mit in Rechnung bringt.

Diese Abstraction wurde gemacht, um sich die Aufsuchung des speciellen Verhältnisses zu erleichtern, das zwischen den Kräften Statt findet, welche wirklich äußerlich an eine Maschiene angebracht sind, deren Gestalt mehr oder weniger verwickelt seyn kann.

Indeß ist bey aller Verwickelung der Maschienen doch leicht zu bemerken: daß man sie immer als eine Zusammensetzung von einer Menge Körperchen betrachten könne, welche durch Fäden oder Stangen getrennt sind, vermittelst welcher sich die Wirkung von einer Kraft zur andern, von Glied zu Glied mittheilt; und so kann man auch jede Maschiene auf die mit Stricken, oder auf den Hebel, ja so gar auf eine von diesen beyden Maschienen allein zurückführen; jedoch nennt man nicht allein jene erstern, sondern auch die Rolle, die Welle, die schiefe Ebene, die Schraube und den Keil, einfache Maschienen. Es ist nicht meine Absicht, die besondern Eigenheiten einer jeden von ihnen aufzuzählen, weil das, wie ich schon bemerkt habe, der Gegenstand ausführlicher Untersuchungen über die Mechanik ist; meine Absicht ist bloß, einige Bemerkungen über die Eigenschaften, welche allen Maschienen gemeinschaftlich zukommen, mitzutheilen.

Je nachdem sich eine Maschiene bewegt, oder im Gleichgewicht steht, je nachdem bringen auch die bey ihr angebrachten Kräfte zweyerley Wirkungen, von sehr verschiedener Beschaffenheit, hervor; weil nämlich bey den sich bewegenden Maschienen noch eine Rücksicht mehr eintritt, als bey denen, welche sich in Ruhe befinden; nämlich die Geschwindigkeit des Punctes, in welchem jede dieser Kräfte angebracht ist. Im Fall des Gleichgewichts hat man bloß auf die Intensität der Kräfte zu sehen; aber bey der Bewegung muß man auch noch auf den von jeder zurück zu legenden Weg Rücksicht nehmen. So bringt z. B. die Kraft eines Menschen, welcher, vermittelst einer Rolle seine Kraft auf ein Gewicht wendet, zwey Wirkungen von verschiedener Natur hervor, je nachdem es durch dieselbe bloß erhalten, oder bis zu einer gewissen Höhe gehoben werden soll.

Indeß müssen diese beyden Wirkungen auf eine innige Art mit einander verbunden seyn, und sind es auch wirklich; denn die eine ist nichts, als ein besonderer Fall der andern; der Fall des Gleichgewichts ist nichts anders, als der Fall einer Bewegung, wo die Geschwindigkeit sich auf o reducirt, d. h. er ist eigentlich die Grenze der Bewegung. Auch stehen für den Fall des Gleichgewichts, wie für den der Bewegung, die beyden Kräfte jederzeit im wechselseitigen Verhältniß mit ihren beyderseitigen Geschwindigkeiten, nach der Richtung dieser Kräfte geschätzt (219.); allein bey der Bewegung ist von wirklichen Geschwindigkeiten die Rede, anstatt daß beym Gleichgewicht bloß von virtuellen Geschwindigkeiten die Rede ist, d. h.

von den unendlich kleinen Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte haben würden, wenn eine von ihnen das Uebergewicht erhielte, und diese kleine Bewegung hervorbrächte.

253. Diese Grundeigenschaft, welche in gewisser Rücksicht beyden Fällen gemein ist, läßt zugleich ihre charakteristischen Verschiedenheiten erkennen. Denn es ergiebt sich aus ihr, daß eine überaus kleine Kraft ein sehr großes Gewicht recht gut im Gleichgewicht erhalten könne; wenn es aber darauf ankommt, es bis zu einer gegebenen Höhe, z. B. der eines Meters, zu erheben, so wird die Kraft um eine um so viel größere Anzahl von Metern heruntersteigen müssen, je kleiner sie im Verhältniß zu dem Gewichte ist. Beträgt z. B. diese bewegende Kraft nur den hundertsten Theil des Gewichts, so wird sie selbiges vermittelst der oben genannten Welle recht gut erhalten können; doch wenn sie es bewegen will, so muß sie hundert Meter niedersteigen, um das Gewicht einen Meter hoch zu heben.

Und da es natürlich ist, die Wirkung einer Kraft, welche an einer Maschiene in Ruhe angebracht ist, nach dem von ihr gehaltenen Gewichte, die Wirkung einer an einer Maschiene in Bewegung angebrachten Kraft aber nicht allein nach diesem Gewichte an und für sich selbst, sondern auch nach der Höhe, bis zu welcher man es hinaufgehoben hat, zu schätzen: so sieht man, daß daraus zwey Wirkungen von ganz verschiedener Natur hervorgeben. Daß nämlich im Fall des Gleichgewichts die Maschiene die Wirkung der Kraft hundertmal so groß machen kann, da hingegen bey einer Maschiene in Bewegung die Wirkung einer Kraft, welche einer gegebenen Intensität und einer gegebenen Geschwindigkeit fähig ist, unveränderlich d. h. immer dieselbe ist, die Maschiene mag eine Gestalt haben, welche sie wolle, und jederzeit gleich dem Producte dieser Kraft in den von ihr durchlaufenen Weg, in der Richtung dieser Kraft geschätzt.

254. Da man über seine Definitionen Herr ist, so kann man mit dem Nahmen: Wirkung einer Kraft, auch etwas anders belegen, als das, was ich so eben damit bezeichnet habe. Jedoch scheint es, wenn man sich in der Ausübung der Künste so viel, als möglich, an das bereits Angenommene anschließt, daß man unter der Wirkung einer Kraft beym Gleichgewicht nichts anders füglich verstehen könne, als das durch sie gehaltene Gewicht; und daß man im Gegentheil, um die Wirkung einer Kraft in Bewegung auszumitteln, nicht allein auf die gehobene Masse, sondern auch noch auf die Höhe Rücksicht nehmen muß, zu welcher sie gehoben wird. Denn ein Pferd z. B. hält man für zweymal stärker, als ein anderes, wenn es in derselben Zeit dieselbe Menge Wassers zu einer doppelten Höhe, oder zweymal so viel Wasser zu der einfachen Höhe hebt; d. h. man beurtheilt seine

Kraft als zusammen gesetzt aus dem Gewichte, welche es binnen einer gegebenen Zeit hebt, und aus der Höhe, zu welcher es dasselbe bringt; und so schätzt man auf gleiche Weise die Arbeit der Handlanger, und bezahlt ihnen darnach ihren Lohn.

255. Hieraus nun ist der wichtige Grundsatz entstanden:

„daß man bey jeder Maschiene in Bewegung stets an Zeit, oder an Geschwindigkeit verliehrt, was man an Kraft gewinnt".

Um den Sinn dieses Hauptgrundsatzes wohl zu fassen, so stelle man sich irgend eine Wirkung vor, welche eine sich bewegende Maschiene hervorbringen soll, z. B. ein gegebenes Gewicht P, welches bis zu einer gegebenen Höhe H gehoben werden soll; es wird folglich diese Wirkung, nach dem bisher Gesagten, durch PH ausgedrückt seyn. Es sey F die zu Hervorbringung dieser Wirkung verwendete Kraft, V ihre in der Richtung dieser Kraft geschätzte Geschwindigkeit, und T die Zeit, binnen welcher die Operation vor sich geht; und, um es noch einfacher zu machen, wollen wir annehmen, die Bewegung sey gleichförmig. Nun behaupte ich, daß man, die zur Hervorbringung dieser Wirkung angewendete Maschiene sey, welche sie wolle, immer bekommen werde $FVT = PH$.

Wir haben (224.) bereits wirklich gesehen, daß in jedem Systeme, dessen Bewegung sich in unmerklichen Graden verändert, der binnen einer gegebenen Zeit durch alle antreibenden Kräfte hervorgebrachte Thätigkeitsmomene immerfort gleich ist dem in derselben Zeit durch alle widerstrebenden Kräfte consumirten Thätigkeitsmomente.

Welches sind nun aber hier die antreibenden und die widerstrebenden Kräfte? Es ist offenbar, daß von jeder Gattung nur eine da ist, daß F die antreibende, und P die widerstrebende ist. Die Wahrheit zu sagen, so giebt es allerdings noch eine andere widerstrebende, nämlich die Kraft der Trägheit, ausgedrückt durch $\int m \frac{dV'}{dt}$ (99.), wo m die Masse jedes Körperchens des Systems ausdrückt, sowohl für das Gewicht P und für die Kraft F, welche immer in jedem Körper wohnt, als auch für die Maschiene selbst, welche auch jederzeit materiell ist; allein für jetzt wollen wir ganz von dieser Kraft der Trägheit abstrahiren, weil man die Bewegung als gleichförmig annahm, und so ist $dV' = 0$. Wir dürfen also nur die Thätigkeitsmomente dieser beyden letzten Kräfte F und P aufsuchen, welche, zufolge des angeführten Satzes, gleich seyn sollen.

Aber (nach 62.) ist der Thätigkeitsmoment einer Kraft das Product derselben in den von ihr beschriebenen Weg, in der Richtung dieser Kraft geschätzt; mithin wird, wegen der vorausgesetzten gleichförmigen Bewegung, und weil V die Geschwindigkeit von F, in der Richtung dieser Kraft geschätzt, ausdrückt, VT der Weg seyn, welchen sie nach dieser Richtung zurücklegen würde, und folglich FVT der während der Zeit T durch diese Kraft hervorgebrachte Thätigkeitsmoment. Auf gleiche Weise erhellt, daß PH der durch P consumirte Thätigkeitsmoment seyn müsse; wir finden also wirklich $FVT = PH$, und mithin gilt diese Gleichung bey jeglicher Gestalt der Maschiene.

256. Aus demselben Grunde würde, wenn man durch den Gebrauch der nämlichen oder einer andern Maschiene dieselbe Wirkung PH hervorbringen wollte, und zwar durch eine andere Kraft f, die mit einer Geschwindigkeit bewegt würde, welche, in der Richtung von f geschätzt, binnen einer Zeit t, $= u$ wäre; aus demselben Grunde, sage ich, würde auch $fut = PH$ seyn.

Um also die Wirkung PH hervorzubringen, muß jederzeit der Thätigkeitsmoment der angewendeten Kraft F oder f dieser Wirkung gleich seyn, und man bekommt:

$$F. V. T. = f. u. t.$$

Soll also z. B. f nur die Hälfte von F seyn, d. h. will man dasselbe Gewicht P bis auf dieselbe Höhe H mit einer nur halb so großen Kraft heben, so muß entweder u doppelt so groß werden, als V, oder t doppelt so groß, als T, oder endlich im Allgemeinen ut noch einmal so groß, als VT.

257. Aus der (261.) gefundenen Gleichung FVT = PH ersieht man, daß es ganz unnütz sey, die Gestalt einer Maschiene zu kennen, wenn man wissen will, welche Wirkung eine bey ihr angebrachte Kraft hervorbringen könne, wenn man diejenige kennt, welche sie ohne Maschiene hervorbringen würde. Wir wollen z. B. annehmen, daß ein Mann continuirlich eine Gewalt von 12 Kilogrammen auszuüben vermögend sey, indem er sich unaufhörlich mit der Geschwindigkeit eines Meters in der Secunde bewegt. Dieß angenommen, so stelle man ihn an einer Maschiene an, und es wird der durch diesen Mann, während der Zeit T, consumirte Thätigkeitsmoment 12 Kilogrammen, 1 Meter T seyn; d. h. es wird seyn:

$$FVT = 12^{\text{kil.}}\ 1^{\text{met.}}\ T.$$

folglich, wegen der Gleichheit von FVT und PH:

$$PH = 12^{\text{kil.}}\ 1^{\text{met.}}\ T,$$

die Maschiene sey, welche sie wolle. Mithin ist die Wirkung PH schlechterdings unabhängig von der Gestalt der Maschiene, und kann diejenige niemals übersteigen, welche die Kraft ihrer Natur nach und ohne Maschiene hervorzubringen fähig ist. Man kann nie eine Maschiene erfinden, vermittelst welcher es möglich wäre, mit derselben

Arbeit, d. h. mit derselben Kraft und derselben Geschwindigkeit, in derselben Zeit angewendet, das gegebene Gewicht P auf eine größere Höhe zu heben, als auf H; oder ein größeres Gewicht bis zu derselben Höhe, oder endlich dasselbe Gewicht in einer kürzeren Zeit zu der nämlichen Höhe.

258. Der Vortheil, welchen die Maschienen verschaffen, besteht also nicht in dem Hervorbringen großer Wirkungen durch kleine Mittel, sondern darinn, daß sie die Wahl lassen, unter mehrern Mitteln, welche man gleich nennen kann, dasjenige zu wählen, welches am besten für die gegenwärtigen Umstände paßt. Um ein Gewicht P zu nöthigen, bis zu einer vorgeschriebenen Höhe zu steigen, oder eine Springfeder sich um eine gegebene Größe zusammen pressen zu lassen, oder einen Körper, in unmerkbaren Graden eine gegebene Bewegung anzunehmen, oder irgend ein anderes, beliebiges Werkzeug, einen gegebenen Thätigkeitsmoment aufzureiben, wird erfordert, daß die dazu bestimmten, bewegenden Kräfte selbst einen, dem ersten gleichen Thätigkeitsmoment aufreiben; davon kann keine Maschiene befreyen. Da aber dieser Moment aus mehrern Gliedern oder Factoren resultirt, so kann man sie beliebig verändern, indem man die Kraft auf Unkosten der Zeit, oder die Geschwindigkeit auf Unkosten der Kraft vermindert; oder auch, indem man zwey und mehrere Kräfte statt einer anwendet; und dieß öffnet eine unendliche Menge von Auswegen, um den erforderli-

chen Thätigkeitsmoment hervorzubringen. Aber, was man auch thun mag, so müssen doch immer diese Mittel einander gleich seyn, d. h. der durch die antreibenden Kräfte consumirte Thätigkeitsmoment muß immer der Wirkung, oder dem Momente, welches die widerstrebenden Kräfte in derselben Zeit consumiren, gleich seyn.

259. Diese Bemerkungen scheinen hinreichend, um denjenigen aus dem Irrthum zu helfen, welche glauben, daß man durch eine geheimnißvolle Anordnung der Hebel bey Maschienen ein Agens, eine treibende Kraft, sie sey, so schwach sie wolle, doch in den Stand setzen könne, die größten Wirkungen hervorzubringen; der Irrthum liegt darinn, daß man sich überredet, es lasse sich auf Maschienen in Bewegung dasjenige anwenden, was doch nur für den Fall des Gleichgewichts gilt; denn, weil man z. B. mit einer sehr kleinen Kraft ein überaus großes Gewicht im Gleichgewicht erhalten kann, so glauben viele, man könne es dadurch auch so geschwind, als man wolle, in die Höhe heben; nun ist dieß aber ein grober Irrthum, weil um dieß zu bewerkstelligen, das Agens sich selbst eine, ihr Vermögen übersteigende Geschwindigkeit, oder wenigstens eine solche geben müßte, wodurch sie um so viel mehr von ihrer Wirksamkeit auf die Maschiene verlöhre, je geschwinder sie sich zu bewegen genöthigt wäre. Eben darum ist die Wirkung der Maschienen in Bewegung jederzeit so eingeschränkt, daß sie nie den durch das Agens, das

sie hervorbringt, consumirten Thätigkeitsmoment übersteigen kann.

260. Ohne Zweifel geschieht es aus Mangel an hinlänglicher Aufmerksamkeit auf diese verschiedenen Wirkungen einer und derselben Maschiene, je nachdem man sie bald in Ruhe, bald in Bewegung betrachtet, wenn bisweilen Personen, denen die gesunde Theorie ganz und gar nicht unbekannt ist, sich den abentheuerlichsten Vorstellungen überlassen, indeß man den gemeinen, einfältigen Tagelöhner durch eine Art Instinkt die wahren Eigenschaften der Maschienen geltend machen und sehr richtig von ihren Wirkungen urtheilen sieht. Archimedes verlangte nur einen Hebel und einen fixen Punct, um die Erdkugel empor zu heben; wie sollte es aber da nicht möglich seyn, fragt man, daß ein so starker Mensch, wie Archimedes, selbst mit der schönsten Maschiene von der Welt nicht binnen einer Stunde Zeit eine Last von hundert Pfunden bis zu einer mäßigen, gegebenen Höhe sollte hinaufbringen können? Der Grund ist, weil die Wirkung einer Maschiene in Ruhe, und einer Maschiene in Bewegung, zwey ganz verschiedene, und gewissermaßen ganz heterogene Dinge sind. Im ersten Falle kommt es darauf an, die Bewegung zu verhindern, aufzuheben; im zweyten darauf, sie entstehen und fortdauern zu lassen; nun ist klar, daß man in diesem letztern noch etwas Weiteres, als in jenem berücksichtigen muß, nämlich die wirkliche Geschwindigkeit jedes Punctes im

System. Doch man wird den Grund dieses Unterschiedes noch deutlicher durch folgende Bemerkung fühlen.

261. Die fixen Puncte und alle andere Hindernisse sind rein passive Kräfte, welche zwar jede, auch noch so große, Bewegung verschwinden machen, aber niemals eine in einem Körper in Ruhe hervorbringen können, man mag sie sich auch so klein vorstellen, wie man will; nun ist es ganz uneigentlich, wenn man im Falle des Gleichgewichts von einer kleinen Kraft sagt, sie hebe eine große auf; denn diese wird nicht durch die kleine Kraft, sondern durch den Widerstand der fixen Puncte zerstört; die kleine hebt eigentlich nur einen kleinen Theil der großen auf, und die Hindernisse thun das Uebrige. Hätte Archimedes das erhalten, was er verlangte, so würde nicht er, sondern sein fixer Punct die Erdkugel gehalten haben; und seine ganze Kunst hätte nicht in der Verdoppelung der Kräfte zum Kampfe gegen die Masse dieser Kugel bestanden, sondern in dem Einanderentgegensetzen jener beyden großen Kräfte, deren eine thätig, die andere leidend war, und die ihm dann zu Gebote gestanden hätten. Wäre im Gegentheil von dem Hervorbringen einer wirklichen Bewegung die Rede gewesen, dann hätte sie Archimedes ganz und gar aus sich selbst nehmen müssen, auch hätte diese, selbst nach mehrern Jahren, nur höchst klein ausfallen können. Man schreibe also nicht den thätigen Kräften zu, was man schlechterdings bloß dem

Widerstande der Hindernisse verdankt, so wird die Wirkung bey Maschienen in Ruhe weiter in keinem größeren Mißverhältnisse zur Ursuche erscheinen, als bey Maschienen in Bewegung.

262. Welches ist denn nun wohl der wahre Zweck von Maschienen in Bewegung? Kein anderer, als der schon angegebene, uns in den Stand zu setzen, die Glieder der Gleichung F V T, oder den Thätigkeitsmoment, welcher durch die bewegenden Kräfte consumirt werden soll, nach Belieben zu verändern. Ist die Zeit kostbar, soll die Wirkung in einer sehr kurzen Zeit hervorgebracht werden, und hat man doch nur eine Kraft, welche zwar wenig Geschwindigkeit, aber doch eine große Anstrengung zuläßt, so wird man eine Maschiene erfinden können, welche die verlangte Geschwindigkeit, durch die Intensität der Kraft ersetzt; kann man im Gegentheil nur über eine schwache Kraft verfügen, welche aber eine große Geschwindigkeit zuläßt, so wird man sich eine Maschiene ausdenken können, vermöge welcher das Agens durch seine Geschwindigkeit die ihm mangelnde Kraft zu ersetzen im Stande ist. Läßt endlich die Kraft weder viel Anstrengung, noch große Geschwindigkeit zu, so könnte man sie zwar durch eine zweckmäßige Maschiene die verlangte Wirkung hervorbringen lassen, aber dann würde man sich eines starken Zeitaufwandes keineswegs überheben können; und da man nie aus diesem Kreise herauskommen kann, so muß das Product F V T der

hervorzubringenden Wirkung schlechterdings immer gleich seyn; und hierinn besteht denn gerade der so berühmte und äusserst wichtige Grundsatz: „daß man bey den sich bewegenden Maschienen immer an Zeit oder an Geschwindigkeit verliehre, was man an Kraft gewinnt". —

263. Uebrigens habe ich hier nur den einfachsten Fall in Betracht gezogen, nämlich den, wo man nur eine einzige Kraft anwendet, um die bestimmte Wirkung hervorzubringen. Gäbe es deren mehrere, F, F^{I}, F^{II} u. s. w., deren Geschwindigkeiten, in der Richtung dieser Kräfte geschätzt, V, V^{I}, V^{II} u. s. f. wären, und die sich respective während den Zeiten T, T^{I}, T^{II} u. s. w. wirksam zeigten, so würde die Summe

$$FVT + F^{I}V^{I}T^{I} + F^{II}V^{II}T^{II} \text{ u. s. w.}$$

es seyn, welche der hervorzubringenden Wirkung gleich gefunden werden würde.

264. Und wenn ferner die Bewegung jeder der Kräfte F, F^{I} u. s. w. veränderlich wäre, so würde

$$\int (FV\,dt + F^{I}V^{I}\,dt + F^{II}V^{II}\,dt + \text{etc.}$$

diejenige Größe seyn, welche als gleich mit der hervorzubringenden Wirkung erschiene, wenn $\int$ das auf die Dauer der Bewegung sich beziehende Integral ist.

265. Endlich ist noch zu bemerken, daß die Geschwindigkeiten V, V^{I} u. s. w. lediglich die wirklichen Geschwindigkeiten der Puncte vorstellen, an welchen die Kräfte F, F^{I} u. s. w. angebracht sind, und zwar im Werthe dieser Kräfte geschätzt; allein, wenn man auf die wirkliche Richtung dieser Kräfte Rücksicht nehmen will, so wird alsdann die Größe:

$$\int (F V dt \cos. F^{\wedge}V + F^{I}V^{I} dt \cos. F^{I\wedge}V^{I} + F^{II}V^{II} dt \cos. F^{II\wedge}V^{II} + \text{etc.})$$

die Größe seyn, welche der hervorzubringenden Wirkung gleich seyn wird.

266. Die Maschienen werden also nicht durch die Vermehrung der Wirkung, deren die Kräfte von Natur einmal fähig sind, sondern durch die Modification derselben überaus nützlich. Freylich wird man nie im Stande seyn, den Aufwand oder die Consumtion des zu Hervorbringung einer gegebenen Wirkung erforderlichen Momentes der Thätigkeit durch sie zu vermindern; allein sie können doch dazu dienen, diese Größe auf eine, dem Zwecke, den man im Auge hat, angemessene Art zu vertheilen; durch ihren Beystand wird man in den Stand gesetzt werden, wo nicht die absolute Bewegung jedes Theils des Systems zu bestimmen, aber doch wenigstens unter diesen verschiedenen einzelnen Bewegungen die passendsten Verhältnisse festsetzen zu können; durch sie endlich wird man den bewegenden Kräften die bequemsten, am wenigsten

ermüdenden, und zweckmäßigsten Lagen und Richtungen geben können, um ihr Vermögen auf die vortheilhafteste Weise anzuwenden.

267. Die Maschienen werden größtentheils durch solche Mittel in Bewegung gesetzt, welche nur eine todte Kraft, oder einen Druck auszuüben fähig sind: dahin gehören Thiere, Springfedern, die Gewichte ꝛc. und daher verändert die Maschiene gewöhnlich ihre Lage nur in unmerklichen Graden; ja es pflegt sehr oft zu geschehen, daß eine solche Maschiene sehr schnell zur gleichförmigen Bewegung übergeht. Der Grund ist: Da die Kräfte, wodurch die Maschiene Bewegung erhält, die widerstrebenden Kräfte um etwas übersteigen, so bringen sie eine kleine Bewegung hervor, die in der Folge allmählich immer mehr und mehr beschleunigt wird; aber nun mag sich als eine nothwendige Folge dieser Beschleunigung, die antreibende Kraft verringern, oder die widerstrebende vermehren, oder endlich eine Veränderung in den Richtungen hinzukommen, so pflegt sich doch fast jedesmal das Verhältniß zwischen den beyden Kräften immer mehr und mehr demjenigen zu nähern, bey welchem sie sich wechselseitig das Gleichgewicht halten könnten; aber dann heben sich die beyden Kräfte auf, und die Maschiene bewegt sich nur vermöge der erworbenen Bewegung, welche, wegen der Trägheit der Materie, gewöhnlich einförmig bleibt.

268. Um noch klarer einzusehen, wie dieß zu-

geht, so darf man nur Acht haben auf die Bewegung eines Fahrzeuges, welches den Wind hinter sich hat; dieß ist gewissermaßen eine von zwey entgegengesetzten Kräften bewegte Maschiene, nämlich von dem antreibenden Winde, und dem Widerstand der Fluthen, auf denen es schwimmt; wenn die erste dieser beyden Kräfte, welche man als antreibend betrachten kann, die größere ist, so wird die Bewegung des Fahrzeuges beschleunigt werden, aber diese Beschleunigung hat schlechterdings Grenzen, und zwar aus zwey Gründen; denn jemehr die Bewegung des Fahrzeuges beschleunigt wird, desto mehr wird es 1) dem Treiben des Windes entzogen, desto mehr wächst aber auch 2) der Widerstand des Wassers; mithin streben diese beyden Kräfte, sich ins Gleichgewicht zu setzen; haben sie dieß aber erreicht, so werden sie sich wechselseitig aufheben, und folglich wird sich das Fahrzeug, wie ein freyer Körper bewegen, d. h. seine Geschwindigkeit wird constant seyn. Legte sich der Wind etwas, so würde der Widerstand des Wassers die treibende Kraft übersteigen, und die Bewegung des Fahrzeuges langsamer werden; eine nothwendige Folge dieses Langsamerwerdens aber würde seyn, daß der Wind wieder heftiger auf die Segel stoßen, und der Widerstand des Wassers sich zu gleicher Zeit verringern würde; mithin würden diese beyden Kräfte immer noch nach Gleichheit streben, und die Maschiene wiederum zu einer gleichförmigen Bewegung gelangen.

Dasselbe ereignet sich, wenn die bewegenden Kräfte Menschen, Thiere oder andere wirkende Kräfte von dieser Beschaffenheit sind; in den ersten Augenblicken ist die bewegende Kraft dem Widerstande etwas überlegen; daraus entsteht eine kleine Bewegung, welche durch die wiederholten Schläge der bewegenden Kraft nach und nach beschleunigt wird; die wirkende Kraft selbst aber muß eine beschleunigte Bewegung annehmen, um mit dem Körper in Berührung bleiben zu können, dem es die Bewegung ertheilt. Diese Beschleunigung, welche sie sich selbst verschafft, zehrt einen Theil ihrer Wirksamkeit auf, so daß sie mit geringerm Erfolg auf die Maschiene wirkt, und die Bewegung dieser immer weniger beschleunigt, und endlich bald gleichförmig wird. Ein Mann z. B., der im Falle des Gleichgewichts eine gewisse Kraft äußern könnte, würde eine viel geringere hervorzubringen im Stande seyn, wenn der Körper, auf den er wirkt, ihm nachgiebt, und er ihm nachfolgen muß, um auf ihn einwirken zu können; die absolute Arbeit dieses Mannes vermindert sich nicht, allein seine Anstrengung zertheilt sich in eine zweyfache, deren eine dazu verwendet wird, die Masse des Mannes selbst zu bewegen, und bloß die andere auf die Maschiene übergetragen wird. Lediglich von dieser letztern offenbart sich die Wirkung für den Zweck, den man sich vorgesetzt hat.

Indessen werde ich noch immer die Maschienen aus einem allgemeineren Gesichtspuncte betrachten, und somit verschiedene, auf die veränderliche Bewegung anwendbare, Bemerkungen hieher setzen; dabey will ich nur das Einzige voraussetzen, daß diese Veränderung in unmerkbaren Graden geschehe, und werde beweisen, daß dieß wirklich der Fall seyn müsse, wenn man sie auf die möglichst vortheilhafteste Weise anwenden will.

269. Die Größe PH, welche wir oben als die hervorzubringende Wirkung betrachteten, ist das, was wir eine latente lebendige Kraft genannt haben. Denn nennt man M die Masse des Gewichts P, und V die zur Höhe H gehörige Geschwindigkeit, so hat man:

$$PH = \tfrac{1}{2} M V^2.$$

Dasselbe gilt von jeder andern durch die bey einer Maschiene angebrachten bewegenden Kräfte, hervorgebrachten Wirkung; und immer wird man diese Wirkung mit einem Gewichte vergleichen können, welches zu einer gewissen Höhe gehoben werden soll, folglich mit einer reellen oder latenten lebendigen Kraft. Eine Feder also z. B. um eine gegebene Größe zusammen zu legen, eine gegebene Masse Luft so weit zusammen zu drücken, daß sie auf die Erfüllung dieses oder jenes gegebenen Raumesinhalts beschränkt wird; so und so viel Korn zu mahlen; einen Wagen mit seiner gegebenen Last von einem gegebenen Orte zu einem andern, ebenfalls gegebenen, auf einem Wege zu ziehen, dessen Rauhigkeit gegeben ist; eine Vertiefung von gegebenen Umfange zu graben, und die Erde auf einen gegebenen Ort zu werfen; eine gegebene Quantität Wasser bey gegebener Tiefe auszuleeren; in einem Körper, oder einem System von Körpern eine gegebene Bewegung hervorzubringen, 2c. das alles sind Wirkungen, deren Werth man durch lebendige Kräfte ausdrücken kann. Aus den Wirkungen dieser Art nun beurtheilt man das Vermögen solcher bewegenden Kräfte, wie der Mensch, das Thier, das strömende Wasser und der treibende Wind ist. Darum glaubten auch viele Gelehrte mit Leibnitz, die Kraft von Körpern in Bewegung müsse anders geschätzt werden, als die Kraft von Körpern, welche sich in Ruhe befänden. Sie hielten die Kraft dieser letztern ganz allein für das Product aus ihrer Masse in ihr Streben zur Bewegung, und meinten, der Werth der andern müsse bestimmt werden durch das Product aus ihrer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeiten. Es ist aber klar, wie wir schon bemerkt haben, daß dieß alles willkührlich sey, und daß man immer dieselben Resultate erhalten werde, wofern man nur immer den sich selbst gemachten Bestimmungen gemäß schließt.

270. Die alsdann angenommenen Benennungen können seyn, welche sie wollen, so wird doch die Betrachtung dessen, was man lebendige Kräfte nennt, in der Theorie von Maschienen in Bewe-

gung jederzeit äusserst wichtig seyn, weil sie zur Schätzung der Arbeit von Menschen und Thieren dienen muß, so wie auch von allen übrigen wirksamen Kräften, welche man mit jenen vergleichen kann.

Das Thier ist, wie ein lebloser Körper, dem Gesetze der Trägheit unterworfen; d. h. das allgemeine System der Theile, aus welchen es besteht, kann sich nicht die geringste fortschreitende Bewegung von selbst geben, es sey in welcher Richtung es wolle; so daß, wenn man z. B. ein Pferd auf eine wagerechte, vollkommen gerade Ebene stellen wollte, es ihm unmöglich werden würde, seinem Schwerpuncte die geringste Bewegung zu geben, es sey, in welcher horizontalen Richtung es wolle, jedoch vermag es jedes Glied insbesondere nach der Seite, nach welcher es will, hin zu bewegen, und dadurch unterscheidet es sich von leblosen Körpern; aber in derselben Zeit, in welcher es seinen Fuß irgendwo vorwärts setzen wird, muß auch ein anderer Theil seines Körpers um eben so viel zurück gehen, weil im ganzen Systeme dieses Thieres das Prinzip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wie bey der trägen Materie Statt findet; dieß geht so weit, daß es sich nur durch die Friction seiner Füße an dem Boden, auf welchem es sich befindet, vorwärts bewegen kann, und indem es der Erde selbst auf welcher es geht, eine Größe von Bewegung mittheilt, welche der seinigen gleich und entgegen gesetzt, für uns aber unschätzbar ist.

271. Es scheint also, daß man das Thier, was das Physische betrifft, als eine Zusammenhäufung kleiner, durch mehr oder weniger zusammengepreßte Springfedern von einander getrennter Körperchen betrachten kann, wodurch es eine gewisse Quantität lebendiger Kräfte verbirgt, und daß diese Springfedern durch ihre Ausdehnung diese verborgene oder latente lebendige Kraft in eine reelle verwandeln. Die größere oder geringere Quantität von verborgenen lebendigen Kräften in einem Thiere ist, eigentlich genommen, das, was man unter dem Grade seiner Kraft versteht, wenn man sagt: dieses Thier ist stärker als jenes, und kann eine doppelte, dreyfache, vierfache Wirkung u. s. w. hervorbringen.

Da aber jede dieser Springfedern gleich stark an ihren beyden äußersten Enden zusammengedrückt wird, und zwar wegen der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, so kann sie nicht die geringste fortschreitende Bewegung hervorbringen, folglich auch die Lage des Schwerpuncts im gesammten Systeme nicht ändern.

Wenn eine solche wirkende Kraft ihrer eigenen Masse irgend eine Bewegung giebt, so wird, wenn auch die daraus resultirende Bewegungsgröße, nach jeder beliebigen Richtung, o wäre, es doch die lebendige Kraft nicht seyn, und wenn man diese wirkende Kraft an einer Maschiene anbringt, so wird die lebendige Kraft, welche jene sich erworben hat, auf die widerstrebenden Kräfte vermittelst dieser Maschiene ohne allen Verlust übergehen; denn das, was sie consumirt, wird durch diese widerstrebenden Kräfte gänzlich aufgehoben werden, und genau das geben, was wir die hervorgebrachte Wirkung nennen.

272. Dabey wird indeß voraus gesetzt, daß zwischen den Theilen der Maschiene, oder den dabey angebrachten Massen kein Stoß und keine plötzlige Veränderung sich ereigne, oder daß sich die Bewegung nur in unmerklichen Graden verändere; denn außerdem würde nach (178) ein Verlust an lebendiger Kraft Statt finden, welcher um so größer seyn würde, je größer die Intensität des Stoßes selbst wäre; hieraus folgt augenscheinlich, daß es für die Erlangung der größtmöglichsten Wirkung einer Maschiene überaus wichtig sey, sie auf so eine Art zusammen zu setzen, daß sich die Bewegung nie anders als in unmerklichen Graden verändern kann. Nur diejenigen Maschienen leiden eine Ausnahme, welche schon vermöge ihrer Bestimmung mancherley Erschütterungen unterworfen sind, wie die Mühlen größtentheils. Und doch ist auch selbst in diesem Falle klar, daß man jede plötzliche Veränderung vermeiden müsse, welche für die Einrichtung der Maschiene selbst nichts wesentliches wäre.

273. Hieraus kann man die Folgerung ziehen, daß z. B. das Mittel zu Hervorbringung der größtmöglichsten Wirkung bey einer hydraulischen Maschiene, welche von einem fließenden Wasser bewegt wird, nicht darinnen bestehe, daß man ein Rad anbringe, dessen Schaufeln den Stoß des Wassers aufnähmen. Denn gewiß, aus zwey Gründen ist es unmöglich, so die höchstmöglichste Wirkung hervorzubringen; den ersten habe ich so eben angeführt, nämlich: es ist etwas Wesentliches, jede Erschütterung zu vermeiden; und dann der zweyte, nach dem Stoße behält das Wasser noch eine gewisse Geschwindigkeit, welche rein für die Maschiene verlohren geht, da man doch diese noch übrige Geschwindigkeit zu Hervorbringung einer neuen Wirkung benutzen könnte, welche zu der ersten hinzu käme, und sie vergrößerte.

Um die hydraulische Maschiene so vollkommen, als möglich, zu machen, d. h. um durch sie die größtmöglichste Wirkung hervorzubringen, würde der eigentliche Schwierigkeitsknoten in Folgendem bestehen: 1) es dahin zu bringen, daß das Wasser durch seine Wirkung auf die Maschiene schlechterdings alle seine Bewegung verlöhre, oder daß ihm wenigstens davon genau nur so viel übrig bliebe, als zum Wiederabfließen nach geschehener Wirkung noch erforderlich wäre; 2) dahin, daß sich alle diese Bewegung nur unmerklich, und ohne die geringste Erschütterung verlöhre, sowohl von Seiten des Fluidums, als auch der festen Theile unter einander; auf die Gestalt der Maschiene würde außerdem wenig ankommen; denn eine hydraulische Maschiene, welche diesen beyden Erfordernissen Gnüge leistet, wird jederzeit die größtmöglichste Wirkung hervorbringen; doch ist diese Aufgabe im Allgemeinen äußerst schwer, wo nicht gar unmöglich zu lösen; und vielleicht giebt es, bey der wirklichen physischen Beschaffenheit der Dinge, und mit Rücksicht auf Einfachheit der Maschiene, wirklich nichts besseres, als die durch Stoß bewegten Räder, und da es nun unmöglich ist, jene beyden geforderten Bedingungen mit einem mal zu erfüllen, da vielmehr, je mehr man dem Fluidum von seiner Bewegung verliehren lassen will, um die erste Bedingung zu erreichen, der Stoß auch um so mehr zunimmt, je mehr man aber im Gegentheil den Stoß mäßigen will, um die zweyte Bedingung zu erfüllen, das Fluidum um so weniger von seiner Bewegung verliehren wird; so sieht man ein, daß ein Mittelweg zu ergreifen seyn wird, durch welchen man, wenn auch nicht auf eine absolute Art, doch wenigstens mit Rücksicht auf die Natur der Maschiene, diejenige wird bestimmen können, welche die größtmöglichste Wirkung hervorzubringen fähig ist.

274. Dieß bringt uns natürlich auf folgende wichtige Frage: Welches ist die beste Art, um gegebene Kräfte, deren natürliche Wirkung bekannt ist, anzuwenden, indem man sie an Maschienen in Bewegung anbringt? d. h. welches ist das

Mittel, um durch sie die größtmöglichste Wirkung hervorzubringen?

Die Lösung dieser Aufgabe hängt zwar noch von besondern Umständen ab, aber man kann darüber auch gewisse allgemeine und auf alle Fälle anwendbare Bemerkungen anstellen. Die wesentlichsten darunter scheinen folgende zu seyn:

Die hervorgebrachte Wirkung ist eine lebendige Kraft, sey es eine verborgene oder eine reelle, welche sich stets mit dem Product PH aus einem Gewicht P in eine Höhe H, vergleichen läßt; wir wollen diese Wirkung q nennen. Auf der andern Seite wird zu Hervorbringung dieser Wirkung schlechterdings erfordert, daß die bewegenden Kräfte ein Thätigkeitsmoment Q consumiren, welches nicht kleiner, als q seyn kann; alles was man also fürs erste fordern kann, ist, daß Q nicht größer, als q sey; d. h. daß nichts von dem Thätigkeitsmomente verlohren gehe, welches die bewegende Kraft aufzehren muß, oder daß Q genau $=$ q sey.

Aber das durch die Kraft F, während der Zeit T consumitte Thätigkeitsmoment Q, welches sich mit der Geschwindigkeit V bewegt, ist, wenn man um mehrerer Einfachheit willen F und V, so wie den von ihnen eingeschlossenen Winkel $F^\wedge V$, als constant annimmt, FVT cos. $F^\wedge V$ (63.); und diese Größe also muß ein Maximum seyn.

T

275. Diese Größe hängt von ihren vier Factoren F, V, T, F^V ab; es ist aber 1) was diesen letzten Factor, d. h. was die Richtung der Kraft in Rücksicht auf ihre Geschwindigkeit betrifft, klar, daß diese Kraft und diese Geschwindigkeit, wenn sonst alle Umstände gleich sind, beyde nach der nämlichen Richtung gehen müssen; denn dieser Factor kann niemals größer seyn, als der Sinus totus, d. h. größer, als wenn F und V zusammenfallen. Was 2) die Intensität der Kraft, ihre Geschwindigkeit, und die Zeit, während welcher sie sich äußert, betrifft, so darf man beyde gar nicht absolut bestimmen, sondern man muß sie bloß in diejenigen Verhältnisse zu einander setzen, welche uns die Erfahrung als die vortheilhaftesten kennen gelehrt hat.

276. So möge man z. B., wollen wir annehmen, die Erfahrung gemacht haben, daß ein Mann, der an eine Kurbel von 14 Zoll im Radius täglich 8 Stunden angestellt ist, immerfort eine Kraft von 25 Pfund ausüben könne, indem er in zwey Secunden eine Umdrehung, oder beynahe drey Fuß in der Secunde macht. Wenn man ihn nun aber viel schneller zu arbeiten antreiben wollte, in der Meinung, die Arbeit dadurch zu befördern, so würde man sie aufhalten, weil er nun nicht mehr im Stande seyn würde, eine Kraft von 25 Pfund auszuüben, und auch die Arbeit nicht mehr 8 Stunden täglich ausüben könnte. Verlangte man im Gegentheil von ihm eine continuirliche Kraft von

mehr als 25 Pfunden, so würde die Geschwindigkeit in einem noch größerem Verhältnisse abnehmen müssen, oder es würde wiederum die Dauer der Arbeit kürzer werden, so, daß das Totalmoment von Thätigkeit geringer werden würde. Der Erfahrung zu Folge, muß man also, damit dieses Moment ein Maximum werde, die Maschiene so einrichten, daß die Kraft die Geschwindigkeit von ohngefähr 3 Fuß in der Secunde behält, und daß der Mann täglich nur etwa 8 Stunden arbeitet. Man begreift wohl, daß jede Kraft, in Rücksicht auf ihre natürliche und physische Beschaffenheit ein Maximum hat, dem analog, von welchem ich so eben sprach, und daß man dieses Maximum im Allgemeinen nur durch Erfahrung auffinden könne.

277. Daniel Bernouilli glaubt, man könne diese Rücksicht sehr allgemein nehmen, und erhalte immer ziemlich dieselben Resultate, man möge nun von den erwähnten treibenden Kräften eine größere Anstrengung mit Verlust an Geschwindigkeit, oder eine größere Geschwindigkeit auf Unkosten der Intensität der Kraft fordern; und man möge sie anwenden, auf welche Weise man wolle, so werde man immer von einem Manne eine Wirkung bekommen, welche einem Kubikschuh Wasser, der 2 Fuß hoch gehoben würde, in der Secunde gleich zu schätzen wäre; und dabey würden 8 Stunden gewöhnlicher Arbeit des Tages angenommen; allein vielfältige, und mit großer Sorgfalt gemachte Erfahrungen haben bewiesen, daß man die Hypothese dieses

berühmten Geometers nur mit großen Einschränkungen annehmen könne. Coulomb hat über diesen Gegenstand unendlich schätzbare Untersuchungen angestellt. Man sehe besonders im 2. Bande der Memoires de l'Institut national pour les sciences physiques et mathematiques seine Abhandlung unter dem Titel: Resultat verschiedener Versuche, die Größe der Wirkung zu bestimmen, welche von Menschen durch ihre tägliche Arbeit hervorgebracht werden kann, je nachdem sie ihre Kräfte auf verschiedene Weise anwenden *).

Ueber diese ganze Materie findet man außerdem noch sehr wichtige Bemerkungen in Bossuts Mechanik **), und in einer Abhandlung von Eu-

*) Resultat de plusieurs expériences destinées à déterminer la quantité d'action que les hommes peuvent fournir par leur travail journalier, suivant les différentes manières dont ils emploient leurs forces.

**) Dieses Werk empfiehlt sich, wie alle übrige dieses großen Geometers, und vorzüglich seine Hydrodynamik, ganz besonders durch die Sorgfalt, womit er unablässlich seine Untersuchungen auf Gegenstände von practischem Nutzen gerichtet hat. In der neuen Ausgabe seines hier erwähnten Werkes, seiner Mechanik, findet man eine Abhandlung über den Druck der Gewölbe, wo dieser wichtige und schwere Gegenstand mit gleichviel Tiefsinn und Klarheit aus einander gesetzt ist.

Anm. d. Verf.

ler unter dem Titel: de machinis in genere (3. Band der Commentarien der Academie zu Petersburg).

Der Bürger Molard, Mitglied des Nationalmusäums der Künste (Conservatoire des Arts) hat ein neues, äusserst sinnreiches Mittel erfunden, die menschliche Kraft bey Maschienen anzubringen, indem man sie wechselsweise mit den Händen und Füßen eine Art von groſser Kurbel treiben läßt, welche sich hin und her bewegt. Der große Vortheil dieses neuen Mittels ist der, daß die Menschen, zu ihrer großen Erleichterung, immer sitzen bleiben können, und die Maschiene nun diejenige Kraft gewinnt, welche sie auf das Stehen wenden müßten.

278. Wenn man auf diese Weise dahin gekommen ist, daß man Q zu einem Maximum gemacht hat, so bleibt noch eine andere, nicht minder wichtige Bedingung zu erfüllen übrig, um die Kräfte, aus denen sie entspringt, die größtmöglichste Wirkung hervorbringen zu lassen; nämlich es so zu machen, daß die Wirkung q, welche ihr gleich seyn soll, im Gegentheil ein Minimum wird; oder es so zu veranstalten, daß in der Wirkung q für die nützliche Wirkung, welche man erhalten will, nichts Ueberflüssiges, nichts Fremdes sey. Dieß drückt Daniel Bernouilli durch folgende wichtige Regel aus:

„daß man bey jedem Werke, welches gebaut werden soll, mit der Untersuchung anfangen müsse, welches der mit diesem Werke nothwendig und wesentlich verknüpfte Effect sey, der, um der natürlichen Beschaffenheit des Werkes selbst willen, nicht vermieden werden könne, und daß man nachher, so viel als möglich, jede andere Wirkung vermeiden müsse".

279. So fordert z. B. dieser Grundsatz, daß man, wie dieß auch schon oben gesagt wurde, jeden Stoß und jede plötzliche Veränderung vermeiden müsse, welche zu der Einrichtung der Maschiene nicht wesentlich gehörte, weil man mit jedem Stoße, welcher geschiebt, an den lebendigen Kräften einen Verlust erleidet, und mithin auch ein Theil der thätigen Bewegung unnütz verschwendet wird.

280. Eben so fordert dieser Grundsatz, daß man keine Bewegung entstehen lasse, welche dem Zwecke, den man sich vorgesetzt hat, fremdartig ist. Wenn es z. B. mein Zweck ist, die größtmöglichste Menge Wassers durch eine Pumpe, oder auf irgend eine andere Weise bis zu einer gegebenen Höhe zu bringen, so muß ich veranstalten, daß das Wasser bey seiner Ankunft im obern Behälter genau nur so viel Geschwindigkeit habe, als erforderlich ist, um da hineinzukommen, denn

alles zu viele derselben würde die Anstrengung der bewegenden Kraft unnützerweise verzehren oder consumiren. Aus (45.) erhellt wirklich, daß alsdann diese Kraft ein unnützes Thätigkeitsmoment zu consumiren haben würde, welches der halben lebendigen Kraft gleich wäre, mit welcher das Wasser in dem Behälter anlangte.

Nicht minder klar ist es, daß man, um eine Maschiene die größtmöglichste Wirkung hervorbringen zu lassen, alle passiven Kräfte vermeiden, oder wenigstens so viel, als möglich, vermindern müsse, wohin die Reibung, die Straffheit und Unbiegsamkeit der Seile, und der Widerstand der Luft gehört, welche sich jederzeit, die Maschiene bewege sich, in welcher Richtung sie wolle, unter der Zahl derjenigen Kräfte befinden, welche ich widerstrebende genannt habe.

281. Aus dem, was bisher über die Reibung und andere passive Kräfte gesagt worden ist, kann man den Schluß ziehen, daß eine fortdauernde Bewegung etwas schlechthin unmögliches ist, wenn man sich, um sie hervorzubringen, nur solcher Körper, welche durch keine bewegende Kraft angetrieben werden, oder auch solcher, welche durch ihre Schwere wirken, oder der Gewichte bedienen wollte; denn da die passiven Kräfte, die man nicht hinwegbringen kann, jederzeit widerstrebende sind, so ist klar, daß die Bewegung stets langsamer werden muß; und aus dem Gesagten erhellt

man, daß, wenn die Körper von keiner bewegenden Kraft angetrieben werden, die Summe der lebendigen Kräfte sich auf o reduciren, d. h. daß die Maschiene wieder zur Ruhe gelangt seyn wird, sobald das, durch die Reibung, vom Anfang der Bewegung an consumirte Thätigkeitsmoment, der halben Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte gleich geworden ist; und bey schweren Körpern wird die Bewegung aufhören, wenn das durch die Reibungen aufgezehrte Thätigkeitsmoment gleich seyn wird der halben Summe der anfänglichen lebendigen Kräfte, plus der halben lebendigen Kraft, welche Statt finden würde bey einer gemeinsamen Geschwindigkeit aller Puncte des Systems, die so groß wäre als diejenige, welche der Höhe des Punctes, wo sich der Schwerpunct im ersten Augenblicke der Bewegung befand, über dem möglichst niedrigsten Puncte, zu welchem er herabkommen kann, zugehört.

Dieselben Schlußfolgerungen lassen sich sehr leicht auch auf den Fall, wo man Federn hat, und überhaupt auf alle diejenigen anwenden, wo, abgesehen von der Reibung, die sollicitirenden Kräfte, um die Maschiene aus einer Lage in die andere zu bringen, ein Thätigkeitsmoment consumiren müssen, welches eben so groß ist, als das, welches von den widerstrebenden Kräften absorbirt wird, wenn die Maschiene aus dieser letztern Lage in ihre erste zurückkehrt.

Die Bewegung würde noch weit schneller aufhören, wenn eine Erschütterung erfolgt, weil sich in einem solchen Falle die Summe der lebendigen Kräfte jederzeit vermindert.

282. Es ist also einleuchtend, daß man schlechterdings die Hoffnung aufgeben muß, etwas dergleichen hervorzubringen, was man ein Perpetuum mobile nennt, wenn es wahr ist, daß alle in der Natur vorhandenen bewegenden Kräfte weiter nichts als Attraction sind, und daß die allgemeine Eigenschaft dieser Kraft die ist, daß sie, wie es zu seyn scheint, bey gleichen Entfernungen zwischen gegebenen Körpern immer dieselbe, d. h. eine Function ist, welche sich nur bey eintretender Veränderung der Entfernung dieser Körper von einander selbst ändert. a

283. Eine allgemeine Bemerkung, welche aus alle dem bisher Gesagten hervorgeht, ist die, daß diejenige Art von Größen, welche ich mit dem Nahmen des Moments der Thätigkeit belegt habe, in der Theorie der Maschienen in Bewegung eine sehr wichtige Rolle spielt; denn diese Größe ist es überhaupt, welche so viel, als möglich, gespart werden muß, um von einer wirkenden Kraft alle ihr nur mögliche Wirkungen zu bekommen.

284. Wird eine Last, z. B. Wasser, auf eine gegebene Höhe zu heben gefordert, so wird man in einer gegebenen Zeit um so mehr davon in

die Höhe bringen, nicht etwa je größer die aufgewendete Kraft ist, sondern je größer das Moment der Thätigkeit ist, welches consumirt worden ist.

285. Ist die Aufgabe die, einen Mühlstein herum zu drehen, es sey durch den Stoß des Wassers, oder durch den Wind, oder durch Kräfte von Thieren, so kommt es nicht darauf an, den Stoß des Wassers, der Luft, oder die Anstrengung des Thieres so groß, als möglich, sich zu eigen zu machen, sondern diese wirkenden Kräfte das größtmöglichste Moment von Thätigkeit consumiren zu lassen.

286. Will man einen leeren Raum in der Luft hervorbringen, so mag man dabey einschlagen, welchen Weg man will, so muß immer, um dieß zu bewerkstelligen, ein eben so großes Moment von Thätigkeit consumirt werden, als dasjenige ist, welches erforderlich wäre, um ein dem zu machenden leeren Raume gleiches Volumen Wasser bis auf eine Höhe von 32 Fuß zu heben.

287. Soll dieser leere Raum in einer Masse Wassers von unbestimmter Größe, z. B. im Meere gemacht werden, so muß dasselbe Moment von Thätigkeit verzehrt werden, als wenn das Meer ein leerer Raum wäre, der leere Raum, welchen man machen will, ein Volumen Meerwasser, und dieses Volumen bis auf die Oberfläche

oder den Spiegel des Meeres gehoben werden sollte.

288. Soll in einem Gefäße von gegebener Gestalt ein leerer Raum gemacht werden, so kann man dieß augenscheinlich nicht anders bewerkstelligen, als wenn man den Schwerpunct der ganzen Masse des Fluidums um ein Gewisses in die Höhe bringt, dessen Größe durch die Gestalt des Gefäßes bestimmt wird; es muß also ein Thätigkeitsmoment consumirt werden, gleich demjenigen, welcher erforderlich seyn würde, um alles Wasser des Gefäßes so viel in die Höhe zu heben, um wie viel der Schwerpunct des Fluidums hinaufsteigen muß.

289. Will man bey einer Maschiene in Ruhe, wo keine Kraft, als die Trägheit der Körper zu überwinden ist, eine Bewegung durch unmerkliche Grade entstehen lassen, so wird das Moment der Thätigkeit, welches zu consumiren seyn wird, gleich seyn der halben Summe der lebendigen Kräfte, welche man in ihr erweckt; und kommt es bloß darauf an, ihre schon vorhandene Bewegung zu verändern, so wird das zu consumirende Thätigkeitsmoment bloß die Größe seyn, um welche diese halbe Summe durch die Bewegung zunehmen muß.

290. Genug, wir wollen annehmen, man habe irgend ein beliebiges System von Körpern, diese

mögen sich unter einander anziehen, im Verhältniß irgend einer Function ihrer Abstände; wir wollen, wenn man will, sogar annehmen, dieses Gesetz sey nicht für alle Theile des Systems ein und dasselbe, d. h. diese Anziehung mag befolgen, welches Gesetz man will, (versteht sich, daß sie zwischen zwey gegebenen Körpern nur mit den Abständen dieser Körper selbst sich verändere,) und es sey nun die Aufgabe, ein solches System aus einer beliebigen gegebenen Lage in eine andere zu versetzen; dieß angenommen, so mag der Weg, welchen man jeden Körper nehmen läßt, um dieser Forderung nachzukommen, seyn, welcher er will; man mag die Körper alle auf einmal, oder nach einander in Bewegung setzen, man mag sie durch eine gerad- oder durch eine krummlinigte, und auf jede Art veränderte Bewegung von einem Orte zum andern bringen, (vorausgesetzt, daß kein Stoß und keine plötzliche Veränderung hinzukomme); man mag endlich jede beliebige Maschiene, selbst eine mit Federn, anwenden, wofern man nur dann die Federn in denselben Grad der Spannung wieder versetzt, in welchen man sie beym ersten Augenblick fand; so wird das Moment der Thätigkeit, um diese Wirkung hervorzubringen, welches die äußern, zur Bewegung dieses Systems angebrachten wirkenden Kräfte zu consumiren haben, um diese Wirkung hervorzubringen, immer dasselbe seyn, vorausgesetzt, daß sich das System im ersten, so wie im letzten Augenblicke der Bewegung, in Ruhe befindet.

291. Und wenn es ferner darauf ankommt, eine Bewegung irgend einer Art in dem System hervorzubringen, oder es befände sich dasselbe im ersten Augenblicke schon in Bewegung, und es soll diese modificirt oder verändert werden, so wird das Thätigkeitsmoment, welches die äußern wirkenden Kräfte zu consumiren haben, demjenigen gleich seyn, welches consumirt werden müßte, wenn blos die Lage des Systems verändert werden sollte, ohne ihm Bewegung mitzutheilen (d. h. wenn man es im ersten, wie im letzten Augenblicke, als in Ruhe betrachtet) plus der Hälfte von der Größe, um welche man die Summe der lebendigen Kräfte vermehren muß.

292. Es liegt also, in Rücksicht des Aufwandes oder des zu consumirenden Moments von Thätigkeit, wenig daran, ob die aufgewendeten Kräfte groß oder klein sind, ob sie diese oder jene Maschienen in Bewegung setzen, und ob sie gleichzeitig würken, oder nicht; das Thätigkeitsmoment bleibt immer gleich dem Product aus einer gewissen Kraft in eine Geschwindigkeit und eine Zeit, oder der Summe mehrerer Producte dieser Art; und diese Summe muß, man mag dabey verfahren, wie man will, immer dieselbe seyn: die wirkenden Kräfte können also nie auf einer Seite etwas gewinnen, was sie nicht auf der andern verliehren müßten.

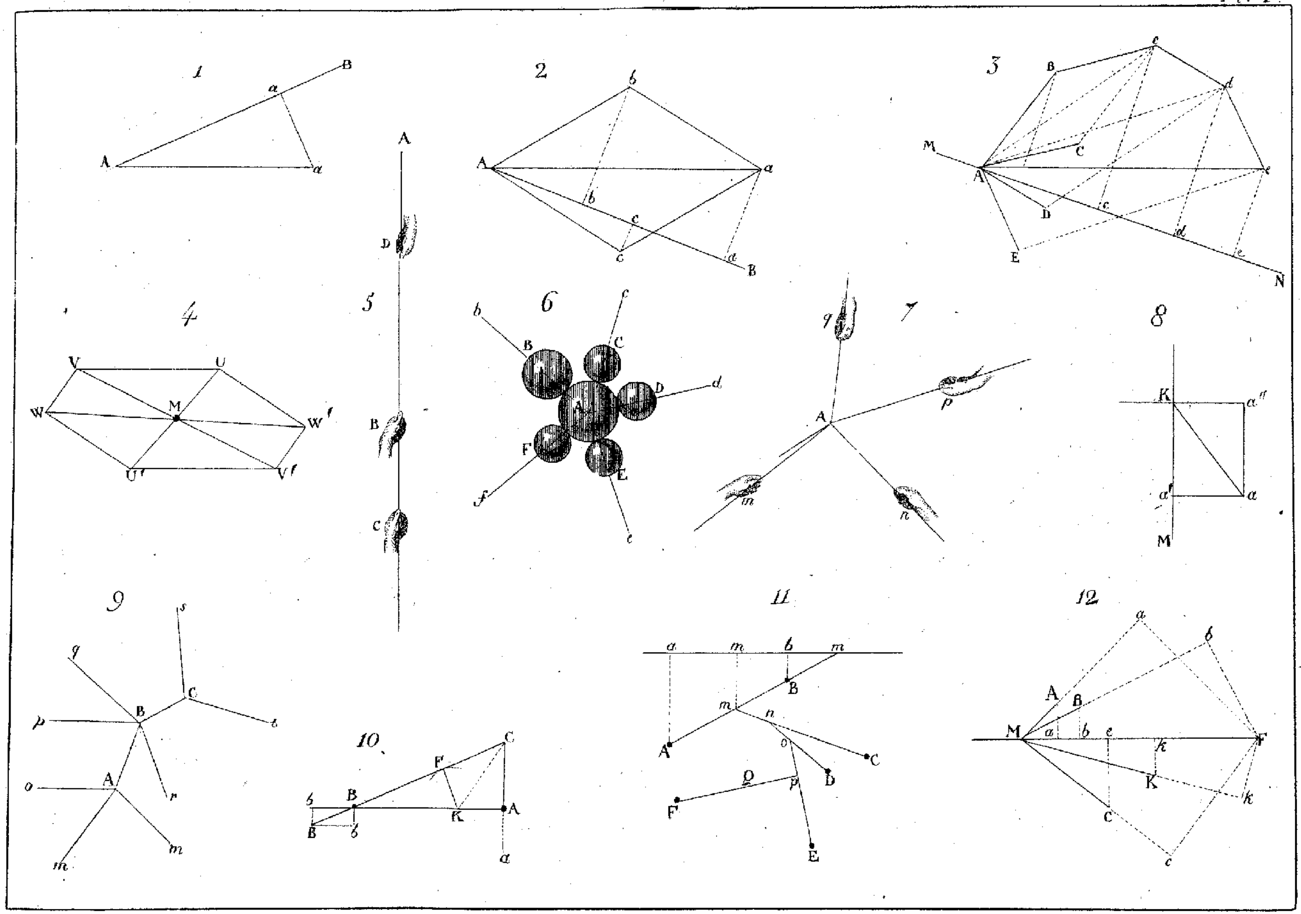
293. Zum Schluß: gesetzt, man habe überhaupt irgend ein beliebiges System von Körpern, welche

durch bewegende Kräfte irgend einer Art in Thätigkeit gesetzt worden sind, und es seyn verschiedene äußere wirkende Kräfte, wie z. B. Menschen oder Thiere zur Bewegung dieses Systems auf verschiedene Weise von beliebiger Art angebracht, entweder für sich selbst, oder vermittelst besonderer Maschienen; dieß vorausgesetzt:

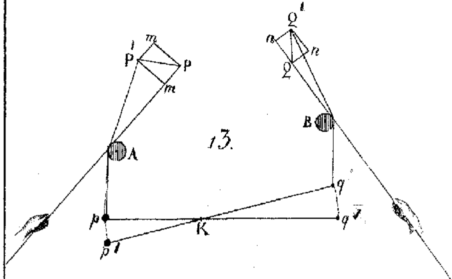
„So mag eine Veränderung im Systeme sich ereignen, welche sie will, so wird immer das binnen einer gewissen Zeit durch die äußern Kräfte consumirte Thätigkeitsmoment gleich seyn der halben Größe, um welche die Summe der lebendigen Kräfte binnen dieser Zeit in dem System von Körpern, wo sie angebracht sind, gestiegen seyn wird: weniger der halben Größe, um welche dieselbe Summe von lebendigen Kräften gewachsen seyn würde, wenn sich jeder dieser Körper in der von ihm beschriebenen Curve frei bewegt hätte, angenommen, daß alsdann in jedem Puncte dieser Curve dieselbe bewegende Kraft auf ihn gewirkt hätte, welche dort wirklich auf ihn wirkt".

Immer ist nur dabey nicht zu vergessen, daß sich die Bewegung blos in unmerklichen Graden verändere, und daß, wenn man Maschienen mit

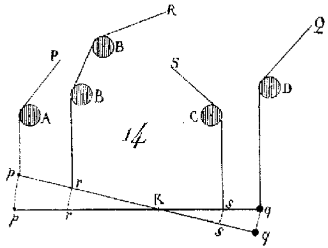
Springfedern anwendet, man diese in eben dem Grade der Spannung lassen müsse, in welchem man sie vorfand.



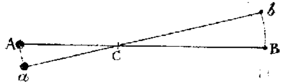
13.



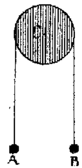
14.



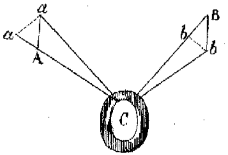
15.



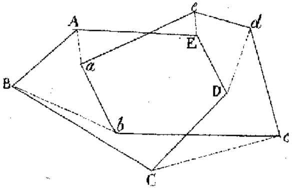
16.



17.

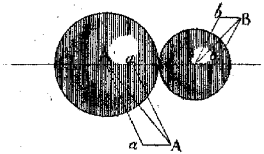


18.

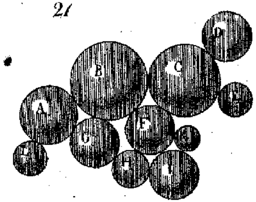


19.

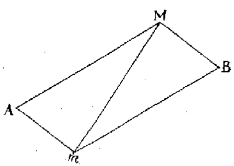
20.



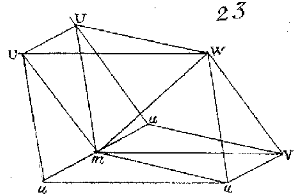
21.



22.



23.



24.